

UNIVERSAL
LIBRARY

OU_224529

UNIVERSAL
LIBRARY

TIGHT BINDING BOOK

**TOTAL DAMAGE
BOOK**

The Drinched Book

سرسبز خان صاحب
 در آید از هندوستان
 در آید از هندوستان
 در آید از هندوستان
 در آید از هندوستان

Wanda's

Algebraical Geometry

translated by Ramchurno teacher
 of European sciences & Radhakishun
 senior scholar
 of the
 Delhie College

سندس بالجبر و اد صاحب کا ترجمہ کیا ہوا راجندر دت صاحب نے تحریر کیا
 اور رادھکشن سکا را علی دہلی مدرسہ کا
 باہتمام بندہ محمد حسین پرنٹر و پبلشر مطبعہ دہلی اردو جاپان متعلقہ
 امام باڑہ دتھی مولوی محمد باقر صاحبین چپا

CHECKED 1946

Checked 1969

CHECKED. 1951

Checked 1965

فہرست مضامین ہندسہ بالجبر

حصہ اول

صفحہ	مطالب کتاب
۱	باب اول حدود اذن خطوط وغیرہ کے بیانین جنسی اس علم میں بحث کیجاہی گئی
۱۲	باب دوم سوالات منقطع کے بیانین
۱۹	باب سوم نقطہ اور خط مستقیم کے بیانین
۴۹	بیان تبدیل اوتار کا
۵۴	دایرہ کے بیانین
۶۵	باب ہشتم عام مساوات درجہ دوم کے بیانین
۸۰	باب ہفتم مساوات درجہ دوم کی تحویل کیے بیانین
۱۰۶	باب ہشتم بیضوی کے بیانین
۱۴۵	باب نہم بعید البیضوی کے بیانین
۱۸۵	باب دہم قریب البیضوی کے بیانین
۲۰۴	باب یازدہم ترشہای مخروطی کے بیانین
۲۳۳	باب دوازدہم اونچی خطوط متحنی کے بیانین جنکی مساوت دو درجہ زیادہ می

۲۱۸	باب سیزدہم بیان تقاطع خطوط منحنی جبرہ میں
۳۰۶	باب چہارم خطوط منحنی غیر جبرہ کے بیان میں
	حصہ دوم
۳۳۳	باب اول آغاز
۳۳۸	باب دہم بیان نقطہ اور خط مستقیم میں
۳۵۶	باب سیوم سطح کے بیان میں
۳۷۴	باب چہارم بیان نقطہ اور خط مستقیم اور سطح میں جبکہ محور منحنی ہو گا
۳۷۹	باب پنجم تبدیلی اوتار کے بیان میں
۳۸۸	باب ششم بیان کرہ اور اذن محبات میں جو گردش سطح منحنی ہو گا
۳۹۷	باب ہفتم بیان سطوح منحنی دوم درجہ کا
۴۱۵	باب ہشتم سطوح منحنی اُسٹوائی اور مخروطی کے بیان میں
۴۳۳	باب نہم خطوط منحنی دو چند خوار کے بیان میں

مشکل اور پر اوس فرع اس علم کی حسین دو بعد کی مقدار و ان ہندی کا ذکر آتا ہے۔

باب اول

آغاز

(۱) اس رسالہ کی تالیف سی پر غرض ہی کہ حل کرین ہم اشکال اور مسئلوں ہندی کو
جبر و مقابلہ کی ذریعہ سے واضح ہو کہ جو وقت میں جبر و مقابلہ کی ملک یورپ میں رواج پایا
توڑی ہی مدت بعد اکثر سوالات ہندی بذریعہ جبر و مقابلہ کی حل کی گئی اس طرح کہ بجا
خطوط کی حروف فرض کر لی گئی جو مقابلہ کے بارے کے کسی لیکن اس طریقہ کی حل کرنے کے بعد عظیم
وقوع میں نہیں آیا کہ اس کے موافق اس طریق کے ہر سوال میں نئی ترکیبیں دراصل حل کرنی ہر
سوال کے نکالنی پڑتے ہیں اور سوچے کوئی قاعدہ کلیہ اس طریق سے نہ نکالنا موجب اس طریقہ عام کا
جسے ذریعہ جبر و مقابلہ کے سبب ہم کہ سوا ہندی حل ہو سکتی ہیں ہندس و سکاٹریز تھا کہ
وقت میں یہ ہندس ایک ہندی شکل حل کر لیتا اور جواب اکثر اس سوال کے مشابہتی اور اس
حل کرنی اس سوال کے اسے دو مقدار میں مجھول لا اور فرض کیں اور بعد نکالنی ایک ایسی
مساد کی حسین یہ دو مقدار میں مجھول پائی جاتی تین اوس میں یہ بات ثابت کر دی کہ یہ مساوات
متعلق ہی ایک مسئلہ نقطہ جس کی یہ خط و درہم یعنی یہ مساوات تعلق رکھتی ہو گی غرض
سے جو مرکب ہے ان سب نقاط سے اور اس خط و درہم کو کو کس مساوات مذکور کی کہتی ہیں ۴
(۲) ظاہری کہ جو وقت ہم قواعد جبر و مقابلہ کو ہندی سہ کی سبب لے کر ناچا میں جو وقت

ہمین یہ بات خوب اچھی طرح سمجھنی چاہیے کہ کس معنی میں علامات جبرئیم ندیمین
مستعمل ہو سکتی ہیں جو وقت ہم ایک گز یا ایک فٹ کا ذکر کرتے ہیں یا منوقت ہمین ان
پناؤں کا خیال مطابق کرنیسی ساتھ ایک پناہ مقررہ کے اتار دے اور اس پناہ مقررہ کو واحد کہتے
ہیں یہ واحد کچھ ہو سکتا ہی مثلاً اگر ہو کہ ایک انچ تو اس صورت میں ایک فٹ کو حاصل
جمع بارہ ایسی احاد کا خیال کرنا چاہئے اور ہر ایک سے تعبیر ہو سکتا ہی ایک فٹ عدد ۱۲ کی ہے
اور اگر واحد کو ایک گز ہو کہ تو ایک میل تعبیر ہو سکتا ہی ۱۶۰۰ اس لیکن کوئی نہ
مستقیم مثل

اب کو واحد کو قرار دی سکتی ہیں اور اگر کوئی اور خط مثل میں دین یہ خط کسی دفعہ پایا
جاتا ہو مثلاً پورا ط دفعہ تو ہم کہتی ہیں کہ خط میں د کا س د ہی ط احاد خطی کے الفاظ
احاد خطی کا حذف کر کے ہم لکھا کرتے ہیں کہ س د مساوی ہی ط کے مثل (۱) میں
س د = ۳ مثال اب کی یعنی س د = ۳ اگر اب ہو کہ خط اب کا پورا کسی دفعہ
س د میں نہیں پایا جاد ہی یعنی احاد س د کی پوری نہیں بت سکتی ہوں احاد اب
پر تو فرض کرو کہ س د ہی سے مقسوم علیہ مشترک ان دونوں جنوں کا دیکھو (شکل ۱)
اور فرض کرو کہ س د ہی م مثال ہی کے یعنی س د = م ہی اور اب برابر ہی
تب ظاہر ہو کہ س د اب ہی س د ہی نسبت رکھتا ہی جو م ہی رکھتا ہی ان ہی معنی جو
رکتا ہی ان ہی معنی جو م ہی رکھتا ہی اب سے اور یہاں سے یہ معلوم ہوا کہ س د ہی م مثال اب کے
یعنی س د = م = ص شکل (۲) میں س د = م = م مثال اب
= اگر خطوط اب اور س د میں کوئی مقوم علیہ مشترک ہو تو ہمیں مجموع

کرنا چاہی طرف اور ترکیبون کی جن پر موقوف ہے مسئلہ مقدار نزولی کا
 علم حساب میں یہ تحقیق ہے کہ ماہ ۲ کو ہم تعبیر کر سکتی ہیں کسی عدد صحیح یا کسور
 محدودے لیکن یہ بات آسانی دریافت کر سکتی ہیں کہ فلانی مقدار محدود ۲۷۰ سی
 زیادہ سی اور فلانی مقدار چونی اور یہ بات جان کر کہ ماہ ۲ ہی جسکی قریب اتنی قریب
 آ سکتی ہیں جتنا ہم چاہیں علامت مام کا حساب میں استعمال کر سکتے ہیں اب فرض کرو
 کہ سی آب میں کئی پوری دفعہ پایا جاتا ہی لیکن وہ نہیں پایا جاتا ہی پوری دفعہ
 خط س دین پس اب فرض کرو کہ ایک عدد م ایسا ہی کہ م ہی کم سی س دس لیکن زیادہ
 (م + ۱) سی سی یہ بات بھی ظاہر ہے کہ کو اتنا کم فرض کر سکتی جتنا ہم چاہیں کیونکہ وقت
 آب ہی پر قیمت پورا ہو سکی تو بالضرر آب قیمت ہو سکیگا ہی کے نصف اور چوتھائی
 اور تین حصہ وغیرہ پوری اور یہاں یہ معلوم ہوا کہ گوس دہین تعبیر ہو سکتا ہی بصحت کمال
 کہ کسی ایک جتنی آب مرکب لیکن ہم اسے اتنا قریب ایسے مقدار کر سکتی ہیں جتنا ہم چاہیں
 یہاں یہ معلوم ہو کہ سی دی جسکی اور مقدار کے جو اندازہ ہو سکتی ہیں سی اوپر جو طرح کہ
 کرنا آئی ہو اگر چہ اور مقدار کے جو اندازہ ہو سکتی ہیں عدد آسے یہاں سے یہ نتیجہ نکلتا ہی
 کہ خاص د کا تعبیر ہو سکتا ہی کے حرف ط ص ع وغیرہ کہ یہ مقدار میں یا تو کس میں یا صحیح یا مفق
 نزول (۳) اگر ایک واحد خفی بر ایک مربع بنایا جائے تو اس مربع کو واحد مربع کہتی ہیں فرض
 کرو کہ سی ایک سطح اور اسکا ایک ضلع دس ہی کہ او میں ط کتنی احاطی شکل سن م

د	ل	م	س
و			
ف			

ط	س
و	م
ف	ل

(۲) ۲
 د
 و
 ف

(۳) ۳
 ط
 و
 ف

اور مَن وغیرہ کے مین اور دوسرا ضلع او سکا س ی ہی کہ دوسرے ص کئی احاد خطی مثل
 س ح اور ح ط وغیرہ مین تقسیم کرو اس سطح کو احاد مربع مین کہیں گے خطوط متوازی خط
 س د کی نقطون ح اور ط وغیرہ س ی کے نقطون م اور ل وغیرہ اظہر
 ہی کہ سب سے اوپر کی قطار س ح دق مین ط کئی چوٹی چوٹی مربع مین یعنی مَن کئی
 مربع مین اور اتنی آحاد مربع مین اس سے نیچے کی قطار مین اور مَن ا ل القاس و سطح باقی مقدار کے
 لیکن بقدر اکل قطار کے ص ہر پیر معلوم ہوا کہ بقدر اکل احاد مربع مین کئی شکل مین ط م س
 یعنی سطح س و ف ط ص آحاد مربع مین یعنی سطح مذکورہ مقدار مین دہی ط ص احاد ح
 کی اور بقوت حذف کرتے مین ہم الفاظ آحاد مربع کو اس وقت ہم کہا کرتی مین کہ سطح
 س و ف مساوی ط س کے مثلاً اگر س د = ۵ ف اور س ی = ۳ ف تو سطح س و ف مین
 ۱۵ مربع ف ہوگی جو کچھ مین اوپر بیان کیا ہی وہ اس وقت درست ہوگا بقوت کہ دونوں
 خط س د اور س ی ایک ہی واحد خطی سے اندازہ ہو سکتی مین پس فرض کرو کہ خط س د کسی
 خاص واحد خطی سے اندازہ کیا جائے دیکھو (شکل ۴) لیکن س ی اسی واحد خطی سے تعبیر
 نہیں ہو سکتی لب او سے جو کچھ پہلی بیان کیا گیا ہی یہ بات ظاہر ہی کہ ہم خط س م اور س ن
 کے ایسی درفیت کر سکتی مین جو اسی واحد خطی سے اندازہ کئی جائے جس سے اندازہ کیا
 ہی اور جو اتنی قریب خط س ی کے ہوں جتنا ہم چاہیں اب کامل کر دھون س و ف اور س و
 اب اسبابی ظاہر ہی کہ بقدر خط ط م س م اور س ن کی قریب تر خط س ی کے آتی جاتی مین
 اوس قدر سطح مین س و ط اور س و ف کی عایدہ و عایدہ قریب تر سطح س و ف کی آتی جاتی مین
 یعنی سطح نقطون س د اور س ی کی حد ہی سطح س د اور س م کی یعنی اوسیکو جیسے

میں ہی ہر خط سہم کی آب فرض کرو کہ ط اور ص میں تعداد احاد خطی فرض کے خطوں
 س د اور س م کی اور یہ بھی فرض کرو کہ س تعبیر کرنا ہی اوس مقدار نزولی کو جو تعبیر کرتی ہے
 خط س ہی کو اور جو خط س م پس سطح خطوں س د اور س ی = سطح خطوں س د اور
 س م = سطح خطوں کے = حاصل ضرب جدول ط اور ص کے = ط اور ص کے حاصل ضرب کے اور
 یہاں ہی یہ معلوم ہوا کہ تعداد تجربہ کی سطح کی مساوی ہوتی ہے حاصل ضرب و س کی دو متصل ضلعوں
 اگر ص = ط تو شکل میں ہو جائے گی مگر جو خط س د کا اور یہاں ہی یہ معلوم ہوا کہ مربع
 کا مساوی ط + ط کسی احاد مربع = ط * پس اب ہم تعبیر کر سکتی ہیں بذریعہ تجربہ
 کی تمام شکل سے مستقیم الاضلاع کو کیونکہ ایسے شکلیں تبدیل کی جاسکتی ہیں مثلثوں
 میں اور مساحت مثلث کی مساوی ہوتی ہے نصف مساحت اوس سطح کی جو واقع ہوا
 مثلث کے قاعدہ پر اور درمیان متوازی کے

(۴) اب اگر مثلثوں مجسم کو جو در مقابلہ تعبیر کیا جائے تو ہمیں فقط یہ لازم ہے کہ درپست
 کریں ہم نزدیک سطحی تعبیر کرنی مساحت جسم ایک ایسی جسم متوازی السطوح کی جسکی زیادہ جسم
 فایوں کے باب ہوں فرض کرو کہ ط اور ص اور س میں تعداد احاد خطی کے طول اور عرض اور
 عمق شکل مجسم متوازی السطوح میں اب اگر کہنچین سطحیں متوازی اس جسم کے جہ سطحوں کے
 اور سیلوں کو احاد جسمی میں منقسم کریں تو ہم بطور کہ شدہ کے ثابت کر سکتی ہیں کہ
 تعداد احاد جسمی کے شکل مجسم متوازی السطوح میں ط + ص × س میں یعنی جسم
 متوازی السطوح مساوی ط + ص × س کے ہی قریب اسطوریہ رہتی ہے ثابت
 ہو سکتی ہے جبکہ کناری یعنی خطوں شکل مجسم مذکور کے ایسے ہوں کہ وہ پورے عدد میں تعبیر ہو

ہو سکتی ہیں یعنی جبکہ وہ کسور ہوں اگر ص = س = ط تو جسم مذکور ہو جائے ایک
 شکل کو ب اور سا ہو گا $x \times b \times ط$ یعنی ط کے (۵) اجسام دفن کر کے معنی
 صورتوں جیریہ کے صورتوں جیریہ مختلف جسم کو بذریعہ ان مساواتوں کے کہ اوٹین بر جز
 حاصل ضرب مساوی مرتبہ کا ہی آسان تعبیر کر سکتے ہیں جیسے کہ جدول آئندہ میں

$$لا = لا$$

$$لا + ط لا = ص ص$$

$$لا + ط لا + ص ص لا = دی ف$$

$$لا + ط لا + ص ص لا + دی ف لا = گ گ$$

لا + ط لا + ص ص لا = غیرہ ... ب ق ر وغیرہ م ا د ن گ
 اول تو یہ سب صورتیں جیریہ بذریعہ خط کے سمجھی جائیں مثلاً اگر تم جاب الفاظ خط کے
 استعمال کیا جاوے تو صورتیں جیریہ مذکورہ اسطورتے تعبیر بھی ہونگے

$$لا دفع ح = ط دفع ح$$

لا دفع ح + ط لا دفع ح یعنی (لا + ط لا) دفع ح = ص ص دفع ح لا ط لا ص ص لا
 دی ف لا دفع ح = گ گ کہ ل دفع ح اور ہذا القیاس اور صورتیں بھی اسطورتے تعبیر ہو
 سکتی ہیں اور اگر حل کریں ہم ان مساواتوں کو تو ہر واحد ان مساواتوں میں قیمت
 لا دفع ح کی معلوم ہو جائیگے بذریعہ ط اور ص اور س وغیرہ مثالوں کے پس
 اس صورتیں ظاہر ہوں گی کہ ط اور ص اور س وغیرہ فقط اعداد ہیں کہ تعلق رکھتی ہیں

خطوط سی او نہیں منکون سے اگر ۷ حرف کیجا تو یہی ہی مفہوم ہوتا ہے جو اوپر
 بیان ہوا ہے اور اس طرح تمام جہیں کے اون تمام مساواتوں کو بجا مرتبہ تیسری مرتبہ سے زیادہ
 ہوگا اسطوریہ سمجھا جائے جبکہ ۷ تعبیر کریں واحد سطح یا واحد کعبی کو (۶) علاوہ معنی کہ
 کی ایک اور بھی معنی صورتوں جبر کے ہوتی ہیں دو مثلاً مساوت دوسری جدول کے کثمتہ
 یعنی تعلق کرتی ہیں سطحوں سے یعنی اوس سے یہ بہت تعبیر ہوئی ہے کہ حاصل جمع دو سطحوں کا
 مساوی ایک تیسری سطح کی اور اسطوریہ مساوات تیسری تعلق رکھتی ہے شکلوں مجسم
 یعنی اوس سے یہ بہت تعبیر ہوتی ہے کہ حاصل جمع تین مجسم ترازو لسطوح کا مساوی ایک چوتھی
 مجسم ترازو لسطوح کے علاوہ ازین ایک مساوت جو متعلق ہے سطحوں سے متعلق خطوط سے ہی
 تصویر کی جاسکتی ہے کہ سطح کے سطحین بذریعہ مربعوں کے تعبیر ہو سکتی ہیں اور جو تہ مربعی خطوط کے
 مساوی ہیں ان اوس وقت وہ سطح مساوی ہوتے ہیں پس کلے مساوت خطوط کی مساوت سطح کی
 (۷) جو کہ کہ اوپر مرقوم ہوا اوس کے بعد یہ بھی کہ مساوت دوم اور سوم کے بالضرر تعبیر ہو
 ہو کر کوئی شکل ہندی مثلاً مساوت $\Delta = ط (د - لا)$ تعبیر ہوتی ہے وہ مشہور شکل ہندی
 ذریعہ ہم تقسیم کر سکتی ہیں کسی خط مفروض کو اسطور کہ کل خط اپنی جہ طول سی ہی بہت
 تو جسم اصغر کی جسم اسی غا اگر مساوت تیسرے دو کرین ہم دوسرے اوسے اجزا اور بدین
 داری اور کو $2 د$ اور $ط$ علیحدہ علیحدہ تو حاصل ہو جائے گا ہمیں مشہور شکل دو کی گئی
 شکل کعب کے (۸) جو تہ مساواتین حل کیجاتی ہیں اور مختلف تیسرے مقدار مجہول کی لکھتے
 ہیں تو اوس وقت دو ترکیبیں ہیں ایک تو یہی کہ اول واسطے حروف $ط$ ص $س$ ع $و$
 اعداد فرض کر کے بعد از ان وہ عمل جبر یہ جو ضروری ہوں موافق علامت جبر یہ کی کہ مثلاً

اگر $p = 4$ اور $v = 5$ اور $s = 6$ ہیں صورتیں اگر ہو گئے ہیں $4 - 5 - 6$

۲ + ۳ = ۵ مثال اور ۱ = ۱/۲ = ۲/۴ = ۲/۴ مثال

واحد خلی کے $1 = 100 = 10^2$ اشل واحد خلی کے $10^6 = 10^3 \times 10^3$ دوسری ترکیب

کرنی مقدار و ن جبر یہ کی بذریعہ علم ہند کے ہر اور اس ترکیب کو مقدار و کھانا ہا س ہن

بہت لطیف ترکیب سی اور علاوہ ازیں اوکئی واسطے بہت فائدہ مند جو ایک کمال

علم ہندوہ الجبر کا محصل کیا جاوین * بیان بنائے مقداد و سکھا *

(۹) فرض کرو کہ لاخط \times من فرض کرو کہ نقطہ واقع بر مقام بر جانے پائش

کی جو قیمت لاکھ شروع کیجاتی ہے

پھر اب فرض کرو کہ $1 = \text{ط}$ اور $\text{ب} = \text{ص}$ اور یہی پہلی اس $= 1 = \text{ب}$ اور $\text{ب} = \text{ص}$

ط+ص لو بھی قیمت لاکھ سی اب فرض کرو کہ لا=ط-ص اور اب فرض کرو کہ ب=ط+ص

ص ب اور ۱ = ۱ ب ب د = ط - ص ایک اور مثال یہی فرض کرو کہ لا =

طرح پس دریت کرو آلا کو بذریعہ ہندسہ کم و ات مفروض سے ظاہر ہی کہ لا: ط

ص: ۱۳۱: معلوم ہو اگر لاء خط سی جو نسبت میں مقداروں معلوم ط اور ص

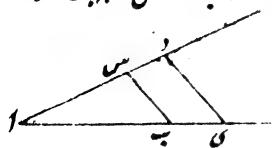
اور میں سے معلوم ہوتا ہے یعنی لا وہ خطی جو اس نسبت سے حاصل ہوتا ہے اس کو قص

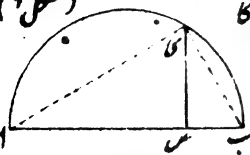
میں دُوبی نسبت ہی جو نسبت ط کو کسی اور خط سے اور اب (شکل ۶) میں خط ط سے

اور اب ہی ایسے کہو کہ وہ نقطہ آبرنگی

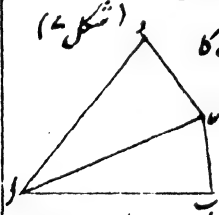
اے جیسے ایک زاویہ نہایت ہموں نور کاٹو

اب = س اور بی = ط اور اس = ص اور وں لڑو ایک خط لفظوں سے اور پنا



[illegible]

سرے = ط اور اصل کرد ایک خط بائیں سے اور آگے اور قیام کرد ایک عمودی ب اوپر
 سے آگے پس موافق شکل ۱۰ مقابلہ اقلیدس کے سبب = $\frac{ط}{ص}$:: لا = ب سبب فرض
 کرد کہ لا = $\frac{ط}{ص}$ + س :: لا = ط + ص + س د = ط (ص + س) د اور فرض
 کرد کہ ص + $\frac{ط}{ص}$ = د :: لا = ط د :: لا = ط اور چونکہ ترکی مساوی ایک خط
 معلوم ہو سکتا ہے تو جو وقت ہم ایک خط وسط فی النسبت بائیں ط اور آگے درخت کرد
 گئے تو خط مساوی لا کی ہوگا اس مثال میں لا کی قیمت ایک اور طرح سے معلوم ہو سکتی ہے
 چونکہ لا = ط + ص + س د تو معلوم ہوا کہ لا ایک ایسا خط مستقیم ہے کہ اس کا
 مربع مساوی دو سطوح ط + ص اور س د کی ہے اور جب موافق ۱۱ شکل اول مقابلہ اقلیدس
 ان دو سطوح کی ایک سطح بنالین اور موافق ۱۲ شکل مقابلہ دوم کی اس سطح کی مساوی ایک
 مربع بنالین تو ایک ضلع اس مربع کا مساوی لا کی ہوگا فرض کرد کہ لا = ط + ص + س
 تو ایک خط اب = ط اور نقطہ سے سی ایک عمود سبب کا
 مساوی ص کے اب پر قیام کرد پس خط اس مساوی ص
 لا کی ہوگا فرض کرد کہ لا = ط + ص + س
 اس پر ایک خط عمود د مساوی س کے بناو تو اوپر ایک خط لا کے مساوی ہوگا
 فرض کرد کہ لا = ط + ص = ما (ط + ص) (ط - ص) پس معلوم ہوا کہ لا
 وسط فی النسبت سی بائیں ط + ص اور ط - ص کے پس شکل گذشتہ سے
 ایک شکل پہلے میں فرض کرد کہ اب = ط اور سی = ص :: بی = ط + ص
 فرض کرد کہ لا = ط + ص + س د اور درخت کرد کہ مساوی د =



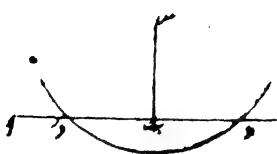
ط + ص سی اور غ لوع = سن + د سی اور ل کو لا = ر س ع سے موافقا
مرقومہ بالا کی فرض کرو کہ لا = $\frac{ط + ص}{سن}$ درفیت کرو کہ ط + ص = ص اور
ع = ص - سن اور بعد ازان لا = $\frac{ط}{ع}$ کو

(۱۱) یہ بات نہایت ظاہری ہے کہ اگر بجائے حروف ط اور ص وغیرہ اعداد
فرض کسی جائزین تو بھی مثالین مذکور الہد سہ پیورنی حل ہو سکتی ہیں مثلاً لا = ۱۰
= ۱۰ × ۴ پس اس صورتین شکل گذشتہ سی پہلی شکل میں فرض کرو کہ س = ۱
م اور ب س = ۳ پس ی س = ۱۲ لا = ۱۰ فرض کرو کہ لا = ۱۰ = ۱۰

ما + آ پس بذریعہ ۱۰ شکل اقلیدس کے ایک خط مساوی کے معلوم ہو
سکتا ہو لا = $\frac{۱}{۱۰}$ = لا = $\frac{۱}{۱۰}$ = $\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰}$ = $\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۰}$

(۱۲) جب مقادیر جبریہ مرکب ہوتی ہیں تو اوکلی مساوی خط درفیت کرنیکی و سطی
قاعدہ بنایا گیا ہی اوکلی ہر جزو کے واسطی ایک ایک خط درفیت کر لین اور بعد
از ان ان سب خطوں کی مساوی ایک خط درفیت کر لین لیکن اب ہم ایک ایسی
ترکیب لکھتی ہیں کہ اوکلی ذریعہ سی مرکب مقادیر کے مساوی ایک خط ایک ہی شکل
کے ذریعہ بنالین مثلاً فرض کرو کہ لا = ط ± ما - ص (شکل ۶)

خط آل پر لو ۱ = ط اور نقطہ ب سی
گیمو ب س = ص عمود او پر آ ب کی
اور س کو مرکز مقرر کر کے اور ط کو نصف قطر
ایک دائرہ کھینچو اور فرض کرو کہ وہ خط آل کو



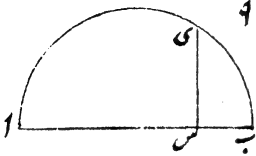
نقطہ اور دہرہ تقاطع کرتا ہی پس ظاہر ہی کہ آد اور آد دو حصتین لے کی ہیں پس
 جو ہر کہ $۱ = ۱$ اب + ب = د = ط + م $\sqrt{ط}$ - ص اور ا د کے اب - ب د
 = ط - م $\sqrt{ط}$ - ص یہ ترکیب عمل میں نہیں آسکتی کی حقیقت صیغہ زیادہ
 ط سی کیونکہ اس صورت میں دائرہ خط اول کمین تقاطع نہیں کرے گا اور یہی مثال
 غیر ممکن ہونی جذری سی واضح ہوتا ہے۔ (۱۳) اشکال ہندسی یا تو خطوں
 کی باب میں یا سطحوں یا جسموں کے باب میں ہوتی ہیں توجہ مساواتیں ان اشکال
 کو تعبیر کریں بالضرور سمجھیں ہونی چاہیں ہیں جسے سب اجزا اور ایک سی صعد یا نزول حاصل
 ہونی چاہیں اور ہوا سلی اگر کسی جہی ایسی صورتیں واقع ہوں $لا = ط$ اور
 $لا = م$ اور $لا = م + ط$ وغیرہ تو قبل ازین جاری کرانی عملوں کے
 لازم ہی کہ ہم اول اون مقدار کو جو جگہ مرتبہ صعد وغیرہ بہ نسبت اور مقداروں کے
 کم ہی عدد ایک میں ضرب کر لیں مثلاً صورتوں گذشتہ کو بطور سی لکھنا چاہئے
 $لا = ط$ اور $لا = م$ اور $لا = م + ط$ اور بعد ازان
 عمل کرنا چاہیے۔

باب دوم

سوالات منقطع کے بیان میں

(۱۴) سوالات ہندسی دو قسم کے ہوتی ہیں منقطع اور غیر منقطع اول قسم کے
 وہ ہیں جنکی جواب ایک یا زیادہ تعداد میں محدود ہیں اور دوسری قسم کی وہ جنکی
 جواب کی تعداد بی نهایت ہی اگر (شکل ۹) میں ہم یہ سوال کریں کہ وہ دس

نقطہ خط ات پر ہی کہ اگر اس نقطہ سی ایک عمود نصف دائرہ تک کہ اس خط پر بنایا



۹

جائے کہ چھین توہ عمود مساوی نصف قطر دائرہ ہو

تو یہ ظاہر ہی کہ یہ سوال ایک سوال منقطع ہے

اسی کی نقطہ دو ایسی نقطے مساوی نصف

برابر کرنی دو لون طرف واقع ہیں جنسی عمود مطلوب کسی جگہ ہے لیکن اگر ہم یہ سوال

کریں کہ ایک خط مفروضہ کے باہر ایک ایسا نقطہ درپٹ کر دے کہ اگر اس میں اور دوسرے

خط مفروضہ میں خطوط ملائی جائیں تو زاویہ جو اس نقطہ پر بنی گا وہ قایم ہوگا آج واضح

ہو کہ اس سوال کی بیشتر جواب ہیں کہ اس کی اگر خط مفروضہ پر ایک نصف دائرہ بناو

تو جتنی نقطے محید نصف دائرہ میں پڑے سب ایسی نقطے ہیں کہ جن میں صفت مطلوب باقی

جاتی ہے۔ سوالات منقطع اس قدر مفید اور شکل نہیں ہوتی ہیں جس قدر کہ غیر منقطع

ہوتی ہیں لیکن منقطع سوالوں سے حل کرنے سے ہی ایک طرح کی استعداد زیادہ ہوتی ہے

سیوے ہم اس قسم کی چند سوال اس جگہ حل کرتے ہیں۔

(۱۵) واسطے حل کرنی سوالات منقطع کی قواعد آئندہ بہت مفید ہیں

قاعدہ اول ایک شکل ایسی بنا لو جس سے بشرط سوال کی تعبیر ہو جائے قاعدہ دوم

نہیں او خطوط اگر ضرور ہوں متوازی اور عمود خطوط شکل مذکور پر قاعدہ سیم ہوں

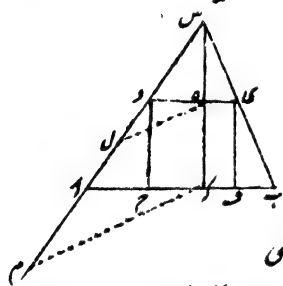
خطوط کو جو معلوم ہیں ط اور ص اور ت وغیرہ سی تعبیر کرو اور غیر معلوم خطوط کو

حروف لآ اور ز اور ق پر ہی قاعدہ چہارم تمام خطوط اصل شکل کو بطور متغیر معلوم

کی تصور کرو اور بعض خواص ہندسی کو جو اس شکل میں پائے جاتے ہوں ایک یا زیادہ

ایسی مساواتیں بنا لو کہ اوہیں مقدار معلوم اور غیر معلوم دونوں پہلے جائیں۔
قاعدہ پنجم ان مساواتوں کے ذریعہ سی مقدار پھول کی قیمت دریافت کرو۔

قاعدہ ششم ان قیمتوں کی مساویہ خط بنا لو اسطوری کہ وہ شکل مفروض میں نمودار ہو جائیں۔ (۱۶) سوال بناؤ ایک مربع ایک مثلث ۱-۳ مفروض



میں فرض کرو کہ دی ف ۶
مربع مطلوب ہے اور س کے ارتفاع

مثلث کی ہر پس اس سوال نقطہ

بات دریافت کرنا چاہئے کہ نقطہ کس جابی

س کہ ہر واقع ہی اسو طریقہ اس صورتیں مقام ہ کہ کا معلوم ہو جائیگا اور مربع ہر

بنجائیگا اب فرض کرو کہ س = ط اور ا ب = ص اور س ہ = لا تب سوائی

شرایط سوال کے دی = ہ کہ اور دی : ۱ = س : ہ : س : ک یا دی : ص : لا

ط : دی = ص : لا اور ہ کہ = ط - لا :: ص : ط - لا = لا :: لا =

ط + ص پس یہاں سی معلوم ہوا کہ لا : ط :: ط : ط + ص اب خط س آئیں گے

کاٹ لو س ل = ط اور خارج کرو س کو کہ تم مکت اسطورے کہ ل م = ص

وصل کرو م کو اور نقطہ ہ سی کیجئے کہ متوازی کہ تم کے پس س ہ قیمت

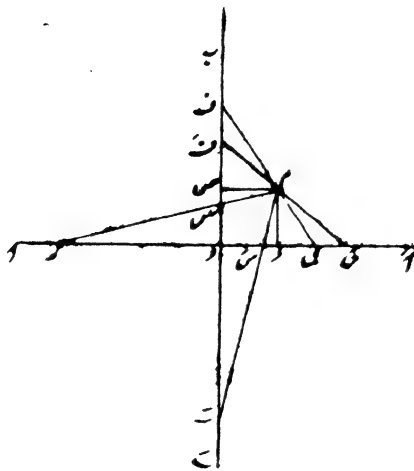
لگائی ہے۔

بین بین ایک مثلث قائمہ الزاویہ دو خط جو صا دہ زاویوں کے نقطہ نسبی مقابل کے

ضلعوں کے وسط میں جا کر ملتی ہیں اور در فیت کیا جاتی ہیں ہم مثلث مذکور کو۔

(۱۴) نقطہ م کا واقع ہوا برابر فاصلوں ب ب ج اور ج ج سے جو خط

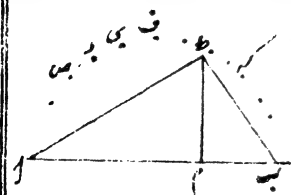
علی القوایم میں



اس نقطہ میں سے گزرتا ہوا کہیں جو خط ف م ق اسطرحی کہ جزق ق جو مابین
خطون ج ج اور ب ب کی محدد وہی مسادہ مقدار معروض ص کی ہو نقطہ
م سے کہیں جو عمود ص اور م د اور فرض کرو کہ م د = ط اور دق = لا اور
ص ف = ک آج ظاہر ہی کہ ف ق = م ق + م ق = ص = $\sqrt{ط^2 + لا^2}$ +
 $\sqrt{ط^2 + لا^2}$ اور $\frac{ط}{لا} =$ اسواسطیکہ مثلث ف ص م اور م دق آپسین
بتش بہرین ص = $\sqrt{ط^2 + لا^2} + \sqrt{\frac{ط^2}{لا^2} + لا^2} = \sqrt{ط^2 + لا^2} (1 + \frac{ط}{لا})$
اور یہاں ہی یہ مساوات حاصل ہوتی ہے $لا^2 + م ط + م ط + لا^2 + (ص - ط)^2 = لا^2 + ط^2$
+ $ط^2 =$ اس مساوات کے حل کرنیسی جا قیمتین لا کی معلوم ہو سکتی ہیں
اور شکل پر کچھ سکتی ہی لیکن دریافت کرنا قیمتوں جو تہی درجہ کی مساوات کا

یہ لمبی صورت ہی کہ اسکی وسیلہ سی شکل باسانی کچھ سکتے ہی اسمن مقدار منفی لایا
 بیفایدہ اور باقی دو قیمتوں سے وہ قیمت جسمین ط ۱۸ + ص ۲ مثبت ہی ہمیشہ ممکن
 رہتی ہی اور خطوں م س ر اور م س ر سی متعلق ہی اور دوسری قیمت جسمین ط ۱۸ + ص ۲
 منفی ہوتی ہی ایسی ہوتی ہی کہ وہ متعلق ف م ق اور ف م ق سی ہوتی ہی لیکن یہ
 قیمت غیر ممکن ہوتی ہی جبکہ ص کم ہو ط سے یعنی جسوقت ملا دین ہم خط د م اور کچھ
 خط ف م ق عمود د م پر تو اس صورتیں اگر ص کم ہو ف م ق سی تو لاک قیمت
 غیر ممکن ہوگی یہ سوال نیوٹن صاحب کی علم حساب عامہ سی نکالا گیا ہی اور اس سے یہ مسئلہ
 ہوتا ہی کہ حل کرنا سبیل ریاضی میں کوئی مقدار کا مجہول فرض کرنا زیادہ مناسب ہے تاکہ
 اسان سی مساوات حل ہو سکے اگر کسی شکل کو حل کرنا ہو تو مجہول ایسا فرض کرنا چاہئے
 جسمین تبدیلی بہت کم واقع ہو - (۲) شکل گذشتہ میں نقطہ م پر سی گذرنا ہو ایک
 خط ف م ق ایسا کہجو کہ حل جمع ہو جو ف م اور م ق کا سا ہو اور یہ خط مفروض
 کے اگر بطور اول جز بقدرہ گذشتہ کی طرف ہی خطوط مختلفہ کی فرض کی جائیں تو حاصل ہو
 یہ مساواتیں ل ۲ + ط ۲ + ص ۲ = ط ۱ اور ل ۱ = ط ۱ + ل ۲ + ص ۲ + ط ۲ + ل ۱ = ط ۱
 ص ۲ اور ل ۱ + ل ۲ = ط ۱ + ص ۲ یا ل ۱ = ط ۱ - ص ۲ اور اس مساوت سے حاصل ہوگی
 قیمت لاک ل ۱ = ط ۱ - ص ۲ اب واسطے اس امر کی کہ بجائے ان چار قیمتوں کا
 خطوط شکل میں کبھی جاوین لازم ہی کہ تم کو مرکز گردا کی بفاصلہ نصف قطر ص کی ایک دایرہ
 جسمین اور فرض کرو کہ خط ۱۱ کو یہ دایرہ نقاط ل اور ل پر تقاطع کرتا ہی اور بعد
 از ان ل اور ل کو مرکز گردا کی بفاصلہ نصف قطر ل دو اور دایری کیجو تو ظاہر ہی

اول دفعہ جبر و مقابلہ یورب میں مروج ہوا سو وقت اسی نزع علم ہندسہ میں جبر و مقابلہ کا استعمال کیا گیا لیکن دسکارٹیز نے جو فراسیسی حکیم تھا اور فرانسیسی کے ابتدا میں موجود تھا اول دفعہ جبر و مقابلہ کا اور با توین استعمال کیا وہ جبر و مقابلہ کو خطوط کے باب میں کام میں لایا اور اس طرح پراگسنے ایک نیا علم ایجاد کیا جس کا نام علم ہندسہ بالجبر رکھا گیا دسکارٹیز کی ترکیب ایک سہل مثال سی بخوبی ہو یہ اس کی فرض کر دے کہ حاجتی میں ہم دریافت کرنا ایسی نقطہ کو کہ وہ واقع ہو یا ہر ایک خط مستقیم



۱ ب کی اور مجموعہ مربعوں ا ط اور ب ط کا مساوی ہو مربع اب کی فرض کر دے کہ نقطہ مطلوبہ ہی اور ا دوس نقطہ سی عمود

ط م کا خط اب پر کیسے جو اور فرض کر دے کہ ۱ م = لا اور م ط = ک اور اب = ط پس موافق شرائط سوال کے ظاہر ہی کہ مربع اب = مربع ا ط + مربع ب ط = مربع ا م + مربع ط م + مربع ط م + مربع م ب = مربع ط = (لا + ک) (ک + ب) (ط - لا) = ۲ = ۲ م + ۲ لا ط - ۲ لا لا + ط = ۲ م + ۲ لا ط - ۲ لا لا - لا اب ط ہے کہ اس مساوات میں بیٹا قیمتین واسطی لا کے فرض کیا سکتی ہیں مثلاً واسع لا یا ا م کی ط اور ط اور ط وغیرہ فرض کر سکتے ہیں اور ان فرضوں کی موافق اوتنی ہی قیمتین کو یا ط م کی دریافت ہوگی اور ہر واحد ان قیمتوں سے ایک نقطہ جس سے شرائط سوال پوری ہوگی دریافت ہوگا فرض کر دے کہ ص د ج ت وغیرہ وہ نقاط ہیں جو اس طرح دریافت ہوئی ہیں نقد قیمتوں

ترکی زیادہ ہو سکتی ہے اگر واسطے لاکے ایسی قیمتیں لیوین کہ وہ بائیں قیمتوں
 مذکورہ بالا کی واقع ہوں اور اس صورت میں ظاہر ہے کہ بنی نہایت قیمتیں ترکی
 دریت ہو سکتی ہیں اور ان قیمتوں کی وسیلہ بنی نہایت نقطی مثل خاص درجہ
 وغیرہ کی دریافت ہو سکتی ہیں اور بنی نقطی اسپین بہت کم فاصلہ پر واقع ہو
 اور آخر کو ان نقطوں سے ایک خط بن جاوے گا اس خط ۱ ص دی و وغیرہ کو
 خواہ خط مستقیم ہو خواہ خط منحنی خط اس مساوات کا گنتی ہیں ۴ —
 اسطوری حل کرنا مساوات غیر منقطع کا کو یا تحقیق کرنا مساواتوں غیر منقطع
 کی خطوں کا ہر اور یہی فرع علم ریاضی بہت بڑی ہے اور اس سے بہت سی باتیں معلوم
 ہو سکتی ہیں —

(۳) مساوات کی واسطے کہ تحقیقات خطوں مساوات کی باسانی ہو سکی رہیں
 دانوں کی مساواتوں کی دو قسمیں کی ہیں اول مساوات جبریہ دوم مساوات
 غیر جبریہ مساوات جبریہ اسی کہتی ہیں جس میں دو مقداریں غیر مقررہ لا اور
 پائی جاوے اور اس کی اجزاء محدود ہوں اور قوای لا اور لا کی اعداد صحیح ہوں
 اور مساوات میں مقدار مقررہ ہے پائی جاوے اور اس مساوات جبریہ کو
 کامل کہتی ہیں جس میں تمام مقادیر کا مجموعہ مقدار مقررہ کی اور ایک مجموعہ
 مقررہ کا پایا جاوے اور اس میں جمع نہ ہون قوای ہوں مقدار مقررہ کی
 میں درجہ ہوتا ہے اور زیادہ معلوم ہوتا ہے دو مساوات ہیں —
 اور ہر ایک میں ان میں اس قدر کم کر کہ مساوات کا گنتی ہیں

ط + ص + لا + س = ۰ ط + ص + لا + س + لا + ص + لا + س = ۰

اول مساوات کامل مساوات درجہ اول کی ہے اور دوسری کامل مساوات درجہ دوم کی ہے اور تیسری قیاسی کونا چاہے اور درجہ یک مساواتوں کا آون مساواتوں کو جنہیں مقدار غیر مقررہ لا اور تین لیکن کوئی بڑا اور غیر مقررہ محدود اور غیر نزدیکی نہیں جن مساوات غیر جبریت گنتی میں مثلاً $۲ = ۳$ جیسے $۲ = ۳$ مساواتیں غیر جبریت ہیں۔ (۲۴) نام خطون مساواتوں کا اوکلی مساوات

کی سو فی ہوتا ہے مثلاً خط اول درجہ کی مساوات کو خط اول درجہ کا گنتی میں اور خط دوسری درجہ کی مساوات کو دوسری درجہ کا خط گنتی میں

اور خط مساوات غیر جبریت کو خط غیر جبریت گنتی میں مساوات جبریت میں ہمیشہ یہ نہیں ہوتا کہ اولیٰ کوئی خط فردی تعلق رکھے اس واسطے کہ مساوات ایسی ہو سکتی ہے کہ حاکم کوئی قیمت ممکن ہو کی مثال یہ ہے $۲ + لا + ط = ۰$ یہ ایک ایسی مساوات ہے کہ ہمیں کہہ سکتے ہیں قیمت لا کی واسطے فرض کریں پہر بھی کوئی قیمت ممکن نہ کی واسطے فرض نہیں ہو سکتی اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ کوئی خط اس مساوات سے متعلق نہیں ہے

بیانست کر نامقام کسی نقطہ کا خاص سطح میں

(۲۵) مقام ایک نقطہ کا کسی سطح میں اس طرح درجیت ہو سکتا ہے کہ معلوم کریں کہ اس مقام میں بعض اشیاء مقررہ کے کہ سطح مذکور میں واقع ہوں پس جب یہ معلوم ہوا تو فرض کرتے ہیں کہ سطح کاغذ کی سطح مفروضہ اور مان لیتی ہیں کہ نقطہ تقاطع آ دو خطوں غیر محدود لال اور سی کا اور زاویہ جو مابین ان

اس واسطے کہ شرط امن سادات کی اوسی وقت پوری ہو سکتی جس وقت ایسا ط
 اور = ص پس بیانی عام قعدہ یہ نکلتا ہے کہ جو کوئی ایسی سادات ہو کہ اس
 شرط نقطہ ایک ایک قیمت لا اور اس کی ایسی پور ہوتی ہو وہ سادات تعلق اور نقطہ
 کی ہوگی جس کا مقام بذریعہ قیمتوں مذکورہ کی متعین ہوتا ہے —
 (۲۶) اسی طرح مقام کسی نقطہ کا درمیان زاویہ ی اکل کی دریافت ہو سکتی ہے لیکن
 واسطی دریافت کرنے مقام اون نقاط کی جزاویہ محال کی درمیان میں واقع
 ہوں چند اور باتوں کا بھی لحاظ رکھنا ضروری فقرہ (۱۸) میں ایک مسئلہ
 حل کرنے میں ہمیں بیان کیا ہے کہ مقدار منفی کی پیمائش ایک خاص سمت میں ہونا
 کرتی ہے لیکن اگر اسی خیال کو ہم زیادہ وسعت دین اور آئندہ کی باتیں حاصل ہو
 جب کسی مقدار پر علامت نفی کی ہم باقی ہیں تو اس سے ہم مراد یہ نہیں ہوتی کہ
 اس کی مقدار میں کچھ فرق آگیا بلکہ یہ مراد ہوتی ہے کہ اس پر ایک طرح کا عمل کریں اور
 اور اسی خاص سمت میں پیمائش کریں مثلاً مقدار سطلق — ہ کی دی ہے جو +
 کی ہے لیکن — ہ سی نقطہ یہ مراد ہے کہ ہ کو تقزیم کرنا چاہئے اور + ہ سی یہ مراد
 ہے کہ ہ کو جمع کرنا چاہئے علامت اثبات یعنی + مختلف مقداروں پر واقع ہوتی ہے اور
 اس علامت کی موافق مقدار میں مختلف واسطے علامت نفی یعنی — سی ہوتی ہیں
 کچھ ہی معنی واسطے + کی ہوں لیکن ہر صورت میں یہ سادات ہوگی — ط + ط
 = پس بیانی یہ معلوم ہوتا ہے کہ — ط کی یہ سمت میں کہ اگر اس پر + ط لگا دیں
 تو مجموعہ صفر ہو جائے اور حقیقت میں یہی علامت نفی کہ ہوتی ہیں کہ وہ ہمیشہ اور

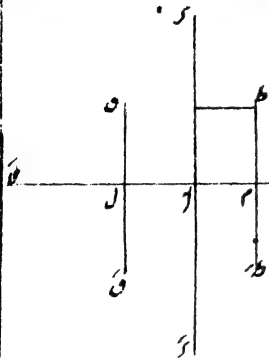
کی موقوف ہوتی ہے مثلاً اگر ایک بانس پانی میں رکھیں اور اس پر نشان انچوں
 کی لکھیں اور ایک خاصہ سیدہ یا نشان عظیم کر لیں کہ اس سے بہت شمار کیا کریں کہ سطح
 پانی کی گتہ اور پانی اور نشان سے ہی بس اس صورت میں اگر پانی اور پانی اس نشان سے ہو مثلاً
 "انچ بلند ہو تو اس بلندی کو مثبت" "انچ کہا کرتی ہیں لیکن اگر پانی نشان سے
 انچ نیچا ہو تو کہا کرتی ہیں کہ پانی کی سطح نفی" "انچ اور پانی نشان نہ کر سہی ہر اور
 وجہ یہ ہے کہ اگر اس نفی بلندی پر "انچ مثبت زیادہ کریں تو بالضرہ حاصل جمع
 سے صفر کے ہوگا اور پانی کی سطح ٹھیک برابر نشان کے ہوگی اور اس کا قیاس
 اور نشان سے صفر انچ ہوگا فرض کر دو کہ ایک آدمی ۶ گنٹی میں ق میل
 نقد امین ایک خاص سمت میں سفر کرتا ہے اور اس قدر وقت میں ق میل بعد وہاں
 سمت مخالف میں آتا ہے بس اس صورت میں ظاہری کہ کل ۱۲ گنٹہ میں وہ ۱۰ ق
 حرکت کر گیا یعنی اس کا فاصلہ مقام شروع سے ق ۱۰ میل ہوگا مثلاً اگر ق
 ۱۰ اور ق ۶ میل تو بعد ۱۲ گنٹہ کی اس کا فاصلہ مقام شروع سے ۱۰-۶=۴
 میل ہوگا لیکن فرض کر دو کہ شخص مذکور ۱۰ ہی میل واپس آتا ہے تو اس کا فاصلہ
 شروع سے ۱۰-۱۰=۰ یعنی صفر میل ہوگا یعنی ۱۲ گنٹی کی بعد وہ آدمی پھر اسی مقام
 پر آجیگا جہاں سے وہ چلا تھا فرض کر دو کہ شخص مذکور ۱۵ میل واپس چلا تو ظاہری کہ
 اس صورت میں وہ بعد ۱۲ گنٹہ مقام شروع صفر کے سے ۱۵ میل بھی پہنچا جیسا کہ
 جائے ہم لفظ چھٹی کا کام میں لائی میں ہو سیکے جبکہ اول دفعہ وہ مقام شروع صفر کے
 تھا تو معنی یہ بات ٹالی تھی کہ وہ اگلی کو چلتا ہی اور اس صورت میں ظاہری کہ جب سفر

۱۰ میل چلتا ہی اور ۵۰ میل چلے والپس آتا ہی تو فی ہر ہی کہ حقیقت میں وہ مقام شروع سی — ۵ میل چلا یعنی ۵۰ میل آگے چلتا ہر ضرور ہے تاکہ مسافر اپنی اصل یعنی شروع کے مقام پر آجائے فرض کرو کہ نقطہ آ سمت مثبت آل میں ایک خط پیمائش کیا جائے اور ہر ۵۰ فرض کرو کہ ایک خط مستقیم بسبب حرکت اس نقطہ کی بنی اور جبہ فقط مقام تک جاوے یعنی ل — ب — ص — ۱

۱۱ آحاد خطی طے کری اور وقت وہ پہلا مقام ص تک چلی اور اس مسافت میں نہ آحاد خطی طے کری بس اس صورت میں ظاہر ہے کہ کل مقدار آگے چلی نقطہ آ کی م — ن خط سے تعبیر کی گئی ہے فرض کرو کہ ن زیادہ ہی م — ن سی بس اس صورت میں بھی ظاہر ہے کہ کل مسافت آگے چلنے آگے م — ن ہوگی لیکن اب م — ن ایک مقدار منفی ہوگی اور اس سے یہ معلوم ہوگا کہ کتنے نقطہ مفروضہ کو آگے لیجنا چاہئے تاکہ وہ اپنی شروع کی مقام پر پہنچ جائے اب ظاہر ہے کہ کوئی خط مثل ۱ ص کے نقطہ آ کی حرکت سے بنا ہوا تصور کیا جاتا ہی اور یہ تصور دو طرح سے ہو سکتا ہی اول تو یہ کہ وہ آ سی ص تک چلا اور دویم یہ کہ وہ اول آ سی ب تک آگے کو پہنچا اور دامن سی اول ص تک آیا اب ظاہر ہے کہ اگر ہم یہ مان لیں کہ جتنی مقدار میں مقام آ طرف ل کی شمار کیا جائے وہ مثبت ہیں تو بالضرور ہمیں ماننا چاہئے کہ جو مقدار میں سمت منی لف میں پیمائش کیا دین وہ سب منفی خیال کیجاوین ل — ب — ص — ۱

۱۲ آ — ظاہر ہے کہ مقام نقاط کی بات سنی معلوم ہو سکتی ہیں اگر فرض کیا

جادوی ادن خطوط کو جو کہ واقع ہوں سمت ۱ لا کی طرف مثبت اور ادنو کو جو کہ ۱ لا کی



طرف ہیں منفی اور اس طرح سی ادنو

جو کہ ۱ لا کی طرف ہیں مثبت اور ادنو

جو ۱ لا کی طرف ہیں منفی سیو

موافق اس فرض کے اگلی فہرست

ادنا کی بجوبی واضح ہو جائیگی

مقام نقطہ کا زاویہ لا اور مین لا + ک +

ق لا ۱ ک لا - ک +

ق لا ۱ ک لا - ک -

ط لا ۱ ک لا + ک -

سیواسطی مساواتین نقطہ ط کی لا = ط اور ک = ص

..... ق ... لا = ط - اور ک = ص

..... ق ... لا = ط - اور ک = ص

..... ط ... لا = ط اور ک = ص

(۲۸) اگر قدر العرض ۱۴ ایک ہی رہی اور ۱۴ کم ہوتا جادے تو نقطہ ط کا نزدیک محور

۱ لا کی آتا جادیکا اور جب مقدار ۱۴ کم کی مساوی ص ہوئی تو نقطہ ط کا محور ۱ لا

پر ہوگا اس صورت میں مساواتین نقطہ ط کی یہ ہو گئی لا = ط اور ک = ص یا

ک = ۲ + (لا - ط) = ۰ سیواسطی جب کہ نقطہ ط کا محور ۱ پر ہو تو اس کی

ساداتین یہ ہونگی لا = ۰ اور ص = ص : (۱-ص) + ۲ لا = ۰
 لکرو دو نقطہ اربعین ام اور م ط کی زایل ہو جاوین تو اسے صورتین ساداتین کہتے

ساداتین نقطہ شروع آ کی ہو جاوینگے لا = ۰ ۰ = ۰ یا لا + ۲ = ۰

مثال (۱) وہ نقطہ جسکی ساداتین لا = ۴ اور ۱ = ۲ واقع ہی درمیان
 زاویہ لا آ کی فاصلہ ۱ = ۴ احاد خطی کے محور سے اور م ط =
 ۲ احاد خطی کے محور آ کی سے

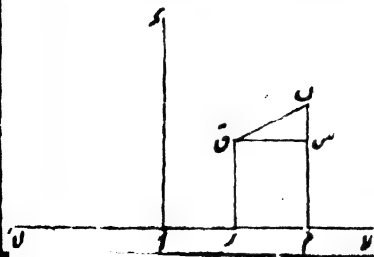
مثال (۲) وہ نقطہ جسکی سادات (۳+۱) + ۲ (۲+لا) = ۰ واقع ہی
 درمیان زاویہ لا آ کی جسکی فاصلہ ۱ = ۲ اور ل = ۳ محور سے ہیں
 مثال (۳) وہ نقطہ جسکی ساداتین لا = ۱ اور ۱ = ۳ واقع ہی خط آ کی
 جسکی فاصلہ = ۳ احاد خطی کے ہی

مثال (۴) وہ نقطہ جسکی سادات ۲ + (۲+لا) = ۰ واقع ہی محور آ
 پر جسکی فاصلہ نقطہ شروع سے سادی ط کی ہی یہ تمام صورتین باسانی ثابت ہو
 ہیں جبکہ محور متقاطع علی القوائیم ہوں —

(۲۹) دریافت کرو ایک صورت واسطے ایک فاصلہ کے جو کہ درمیان نقطہ آ
 اور ق کی واقع ہی فرض کرو کہ محور

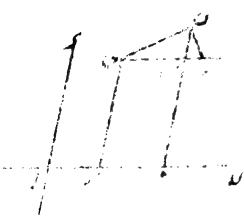
متقاطع علی القوائیم ہوں اور مان لو
 کہ ساداتین نقطہ ن کے لا = ط

اور ۱ = ص اور ق کی لا = ط



اور $ص = ص$ یا فرض کرو کہ او تار نقطہ $ق$ کے $ا = ط$ اور $م = ن$ $ص = ص$ اور
 او تار نقطہ $ق$ کی $ا = ط$ اور $ری = ص$ اور کیسے $خط$ $ق$ $س$ کا متوازی خط
 آلا کی اس میں $مربع$ $خط$ $ق$ $ن = مربع$ $خط$ $ق$ $س + مربع$ $ق$ $س$ کو اور چونکہ $ق$ $س$
 $= رم = ا = ط = ط$ اور $ن = م = ق = ر = ص = ص$
 $\therefore ف = ق = ا = (ط - ط) + (ص - ص) = ۰$ اگر $ق$ زاویہ $ا$ $ا$
 میں فرض کیا جاوے تو $ا = ط$ $\therefore ف = (ط + ط) + (ص - ص) = ۰$
 اگر نقطہ $ق$ کا شروع پر فرض کیا جاوے تو $ط = ۰$ اور $ص = ۰$ $\therefore ف = ط + ۰$
 $ص = ۰ \therefore ف = \sqrt{ط + ص}$

(۳۰) اگر محور متقاطع علی القوائیم نہ فرض کی جاوے بلکہ زاویہ جو کہ محور آپس میں
 بناتی ہیں $= ج$ اب واسطے ثبوت شکل مرقومہ بالکے کیسے $خط$ $ق$ $ن$ $م$ اور $ط$



تو متوازی آلا کی اور $ق$ $س$ کا متوازی
 آلا کے اور ڈالو ایک عمود $ن$ کا $خط$ $ق$ $س$

پر تو $مربع$ $ق$ $ن = مربع$ $ق$ $س + مربع$
 $ن = س + دو$ $مربع$ $ق$ $س$ اور $س$ $د$ کو
 اور چونکہ $ق$ $س = ط - ط$ اور $ن = م$

$= ص - ص$ اور $س = د = م = س$ $ج = م = س$ $ج = م = س$ $ج = م = س$

$\therefore ج = (ط - ط) + (ص - ص) = ۰$ اور $ط = ط$ $(س - ص) = ۰$

اور چونکہ نقطہ $ق$ کا نقطہ شروع ہوگا تو $ط = ۰$ اور $ص = ۰$ $\therefore ف = ط + ۰$

ص ۲ + ص ۲ ج ۱

در باب مساوات اوم خط کی جو کہ اول درجہ سی متعلق ہے

(۳۱) دریافت کرو خط اول درجہ کی مساوات کا حسین دومقارین غیر مقررہ پاسی

جادین عام صورت ایسی مساوات کی کہ ہوگی $1x + b = 0$ یا

$$x = -\frac{b}{1} \quad \text{یا} \quad x = -\frac{b}{1} \quad \text{اگر} \quad x = -\frac{b}{1} \quad \text{اور} \quad x = -\frac{b}{1}$$

ص آب ہم سب سے پہلی نہایت آسان صورت مساوات درجہ اول کی جو کہ $x = -\frac{b}{1}$

ہی حل کریں گے فرض کرو کہ $1x + b = 0$ اور $1x + b = 0$ متقاطع علی القوایم مین اور اب ایک نقطہ

فرض کرنی سی لا کہ مساوات گذشتہ مین مساویہ ایک خاص قیمت ۱ یا ۲ یا ۳ وغیرہ

حاصل ہو سکتا ہی فرض کرو کہ آہ

اور $m = b$ اور $1x + b = 0$ اور $1x + b = 0$

اور $1x + b = 0$ اور $1x + b = 0$

میں اور چونکہ $x = -\frac{b}{1}$ کی

تو $m = b$ اور $1x + b = 0$ اور $1x + b = 0$ اور $1x + b = 0$

یہاں ہی معلوم ہو کہ مثلث $1x + b = 0$ کا مشابہہ ہی مثلث $1x + b = 0$ کو اور زاویہ $m = b$ کا

مساویہ ہی زاویہ $1x + b = 0$ کی اسبسط خط $1x + b = 0$ منطبق ہوگا خط $1x + b = 0$ پر اگر ایک تیسرا

نقطہ $1x + b = 0$ کا بھی اسبسط لیا جائے تو اسبسط حسی ثابت ہوگا کہ خط $1x + b = 0$ منطبق ہے خط

$1x + b = 0$ اور $1x + b = 0$ پر یہاں سی ثابت ہو کہ تمام نقطے $1x + b = 0$ ق ر وغیرہ ایک ہی خط مستقیم

میں آ رہیں اسبسطور سی جبکہ لا کو قیمت منفی دئی جادین تو نقاط $1x + b = 0$ وغیرہ

دریافت ہو جاوے گا اور اب ثابت ہو گا کہ تمام نقاط آق و غیرہ ایک خط مستقیم آرمین بین پہا نسبی ہر طائر ہو گا خط س آرمین مساوی و = طائر نسبی ہو اسی اور مساوی و = طائر + ص من معلوم ہو تا ہم کہ زیاد تر و کا زیادہ ہو جائے و ترسی بمقدار ص کی اور اب اگر قطع کرین ہم آ آ و آ آ میں سے مساوی مقدار ص کے اور کہیں نقطہ ای سی خط و ای ف کو متوازی خط س آرمین کی تو و ای ف وہ خط ہو جو کہ بوسیدہ مساوی و = طائر + ص کی حاصل ہو اسی پہا نسبی معلوم ہو گا مساوی اول درجہ کی تعلق رکھتی ہی خط مستقیم ہے۔

(۳۲) اب ہم بیان کر گئی واسطے بخوبی سمجھنی خاصیت اس مساوت کی۔ درست
 کر دیکھ مساوت واسطے خط مستقیم h و k کی یعنی معلوم کرو نسبت اس خط کی
 مختلف نقطوں کے اوتار کی فرض کرو کہ A نقطہ شروع محور h اور A'
 کا ہی اور نقطہ A سے کچھ الگ نقطہ A'' کا متوازی خط h کی اور نقطہ A سے
 جو کہ خط مفروض پر ہی کچھ عمود است h کا A' پر جو کہ کائی کا خط h کو نقطہ B
 پر اور فرض کرو کہ $h = A$ اور $h = B$ اور $h = C$ اس واسطے یہ

$$= \text{بم} + \text{بٹ} = 1 \text{م مس ب} + 1 \text{م ی} = 1 \text{ا مس ف ک ل} + \text{ص یا}$$

$$= \text{ط ل} + \text{ص ل} + \text{ا م مس ف ک ل} = \text{ط ل اور اب اگر اک} = \text{ط کی فرض کیا جائے}$$

$$1 \text{ تو } 1 = 1 \text{ ک مس ی ک } 1 \text{ یا ص} = \text{ط ط' ہی واسطے مساوات نقطہ مستقیم}$$

$$\text{ہم جو چاہیے } = \text{ط ل} + \text{ط ط}$$

(۱۰۳) واضح ہو کہ اس دست نام خط ستقیم میں دو مقداریں مقررہ ہیں اور

کی ہر مقدار جن کی مساوی فاصلہ اسی یا سوا کوتر اور نقطہ کی ہر جگہ
خط مستقیم تقاطع کرتا ہی محور کے کسی اور مقدار کا تغیر کرتی ہر ماس اس
زاویہ کو جو کہ خط مستقیم بناتا ہی محور کے کسی کیونکہ زاویہ فک ۱ = زاویہ ۱
یہاں ہی معلوم ہوا کہ مس فک ۱ = مس ب ۱ م = ۱/۲ ص = ط اور
واضح ہو کہ ط تغیر کرتا ہی ماس زاویہ فک لاکو اور اسی ماس زاویہ فک لاکو
کا ہی بچنا چاہئے

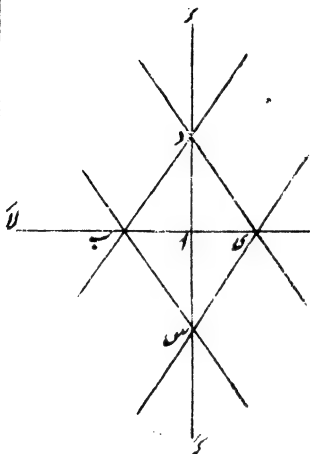
(۳۴) مساوات ۲ = ط لاکو + ص مین دو مقدار مین ط اور ص کی مثبت یا
منفی ہو سکتی ہیں یا ایک انین سی مثبت اور دوسری منفی ہو سکتی ہر اب ہم درپٹ
کر چکی مقام خط مستقیم کو ہر ایک صورت مین اور یہ ط ہے کہ بوسیہ معلوم ہونی دو
نقطہ کی ایک خط مستقیم باسانی کچھ سکتا ہی ایسا طے اب ہم درپٹ کریں گے اور نقطہ
کو جہاں کہ یہ خط مستقیم کا ٹٹا ہی دو محوروں کو اور یہ نقاط باسانی معلوم ہو سکتی ہیں
(۱) فرض کرو کہ ط اور ص مثبت مین :: ۱ = ط لاکو + ص فرض کرو کہ لاکو = ۰

:: ۱ = ص محور کے کسی کا ٹو ۱ = ص اور فرض کرو کہ ۲ = ۰ :: لاکو = ص
اول مین سی کا ٹو ۱ = ص اور لاکو ب دو خط مستقیم ب دوہ خط ہی جگا
درپٹ کرنا منظور تھا (۲) فرض کرو کہ ط مثبت اور ص منفی مین :: ۱ = ط لاکو
- ص فرض کرو کہ لاکو = ۰ :: ۱ = ص مین سی کا ٹو ۱ = ص
اور فرض کرو کہ ۲ = ۰ :: لاکو = ص اول مین سی کا ٹو ۱ = ص اب لاکو
مین کو تو سی خط مطلوب ہے (۳) فرض کرو کہ ط منفی اور ص مثبت ہی

۱۰ = ط + ص فرض کرو کہ لا = ۰ : ۰ = ص آئین سے قطع کرو

۱۱ = ص اور فرض کرو کہ لا = ۰ : لا = ص آئین سے کاٹو ۱ = ص

لاؤ آری کو تو خط دہی خط مطلوب ہی (۲) فرض کرو کہ ط اور ص دونوں منفی



ہیں : ۰ = ط + ص

اب فرض کرو کہ لا = ۰ : ۰ = ص

۱ آئین سے کاٹو ۱ = ص

اور فرض کرو کہ لا = ۰ : لا = ص

۱ = ص آئین سے قطع کرو

۱ = ص : ص = ط اور ب سے کو تو

ب سے خط مطلوب ہو

(۲۰) سقد آریں ط اور ص کی اپنی ذات میں بھی تبدیل ہو سکتی ہیں یعنی کم و بیش

ہو سکتی ہیں سو اسی برائی علامت کے فرض کرو کہ ص = ۰ : ۰ = ط

اسکی وسیلہ سے ایسے دو خط مستقیم درخت ہو سکتی ہیں جو کہ گذرتی ہیں نقطہ

شرع پر سے اور جنکی ماس + ط اور - ط ہی فرض کرو ط = ۰

۰ = لا + ص یا ۰ = ص اور لا = ۰ پہلی مساوات معلوم

ہو تا کہ ہر ایک نقطہ خط مستقیم میں مساوی فاصلہ پر ہی محور لآسی اور دوسری

مساوات یا (۰ = لا) سے معلوم ہو تا ہی کہ ہر ایک قیمت لا کی شرط مساوات کے

پہلے کرتی ہی رہا ہے۔ معلوم ہو اگر ماس مساوات کی وسیلہ درخت ہو گی دو خط

دو خط مستقیم جو کہ کبھی جاوین گئے ذوقظون د اور س سے متوازی محور لا کے
 فقرہ (۲۸) میں بیان کیا گیا ہے کہ مساواتیں $r = ص$ اور $لا = ۰$ تعلق رکھتے
 ہیں ایک نقطہ سی اور دہی بیان ثابت کیا ہے کہ $r = ص$ اور $لا = ۰$ تعلق ایک
 خط سی رکھتی ہیں یہاں سی ثابت ہوا کہ $لا = ۰$ کا جبکہ کہ اکثر چوڑ دیتی ہیں ضرور
 ہی ڈ کرنا چاہئے فرض کرو کہ $ط = ۰$ اس صورت میں موافق فقرہ (۳۲) کے
 مساوت خط مستقیم اسطور سے لکھی جاویں گے $ر = ط + لا$ یا $ط = ۰ + لا$
 اور جبکہ لکھی گئی ہیں اس میں قیمت $ط = ۰$ کی تو صورت مساوات کی یہ ہو جاوے گی
 $ر = ط + لا$ یہاں سی معلوم ہوا کہ $لا = ۰$ اور $ر = ۰$ مساواتیں دو خط
 مستقیم کے ہیں جو کہ متوازی ہیں محور کی فاصلہ $ط$ پر اور اب فرض کرو کہ
 $ط = ۰$ اور $ص = ۰$ اس واسطی صورت $ر = ط + لا$ ص اس شکل کی ہو جائے
 $ر = ۰ + لا$ یہاں سی معلوم ہوا کہ $ر = ۰$ اور $لا = ۰$ سی محور لا کا تعبیر
 ہوتا ہے اور اگر $ط = ۰$ اور $ص = ۰$ کی ہو تو صورت مساوات یہ ہو جاوے گی
 $ر = ۰ + لا = ۰$ اور $ر = ۰$ اور یہ مساواتیں تعبیر کرتی ہیں محور کو
 (۳۶) موافق ترکیب گذشتہ کی ہر ایک خط جبکہ کوئی مساوات تعلق رکھتی ہو جائے
 کچھ سکتا ہے نشان آئندہ میں پچھلے شکل کا لحاظ رکھنا چاہئے
 مثال (۱) $۱ - لا - ر = ۰$ فرض کرو $لا = ۰$ $ر = ۰$
 محور آر میں سے قطع کرو $اد = ۰$ احاد خطی کے تو اب معلوم ہوا کہ یہ خط
 گذرہاں نقطہ د میں سے اور اب فرض کرو $ر = ۰$ $لا = ۰$

محور ۱ میں سے کاٹو اب $= \frac{1}{2}$ احاطہ خطی کی تو اب معلوم ہوا کہ یہی خط ب
میں سے ہی گزرتا ہی ملاؤ ایک خط درمیان نقاط د اور ب تب خط ب
خط مطلوب ہوگا

مثال (۲) $۱۰ - ۱۱۲ + ۶ = ۰$ اس مساوات کی حل کرنی سے معلوم ہوگا کہ
یہ تعلق رکھتی ہے ایک ایسی خط سے جو کہ واقع ہوگا اور سمت جس میں کہ خط سے
واقع ہے مثال (۳) $۵ = ۵ = ۰$ فرض کرو کہ $۵ = ۰$ $۰ = ۵$

یہاں سے ظاہر ہوتا ہے کہ وہ خط جس سے یہ مساوات تعلق رکھتی ہے نقطہ شروع
پر سے گزرتا ہی اور چونکہ اس مثال میں $۵ = ۱$ تو معلوم ہوا کہ خط مذکور محور سے زیادہ
۵ درجہ کا بناتا ہی اب کہیو ایک ایسا خط جو کہ تنصیف کری زاویہ ۵۱ کا کہ تو
یہ خط کہی ہو خط مطلوب ہوگا مثال (۴) $۵ - ۵ = ۰$ اس سے معلوم

ہوتا ہے کہ وہ خط جس سے یہ مساوات ہے نقطہ شروع پر سے گزرا ہی واسطے معلوم کرنے
ایک دوسری نقطہ کی فرض کرو کہ $۵ = ۵$ $۵ = ۵$ یہاں سے معلوم ہوگا
۱ = ۵ اور نقطہ سی کہیو ایک عمود (ی ب = ۲) پر اور ملا کی نقاط
ا اور ب کہیو ایک خط جو کہ مطلوب ہے

(۵) $۵ + ۵ = ۰$ اس کے وسیع سے ایک ایسا خط پیدا ہوگا جو کہ گزریگا نقطہ آ میں
سی متوازی ہوگا خط ب سے کو مثال (۶) $۵ - ۵ = ۰$ اس کی حل کرنی سے معلوم
ہوگا کہ یہ حاصل ہوگی جو کہ زاویہ ۹۰ کا بنا دینگی محور لا سے

مثال (۷) $۵ - ۵ = ۰$ قطع کرو ا د $= ۰$ احاطہ خطی کے تو اب ایک خط پیدا

گیا نقطہ تین سے متوازی $آ$ کی خط مطلوب ہوگا مثال (۱) $آ + لا - ۲ =$
 $ک$ کا ٹو $ی = ۱$ اور $ب = ۲$ تو اب ایک خط کھینچا گیا نقاط $آ$ اور $ب$
 میں سے مثال (۲) $ر + لا = ۴$ مساوات خط مستقیم آسانی اس صورت
 کی ہو سکتی ہے $ر + لا = ۱$ مقدارین $ر$ اور $لا$ فاصلہ نقطہ شروع سے
 اس نقطہ کے ہیں جہاں کہ خط مستقیم تقاطع کرتا ہے محور $ن$ اور $ر$ سے اب اگر
 ہم برعین صورت مثال (۳) کی طرف $ر + لا = ۱$ کی تو $ک = ۱$ اور $ب = ۲$
 صورت مساوات (۴) کی ہو جاوے گی $د = ۱$ اور $ی = ۲$ اور $لا$ و $د$ کی تو
 خط $د$ کی خط مطلوب ہوگا

(۴) اگر ایک مساوات اول درجہ میں جذر ایک مقدار منفی کا پایا جاوے تو یہ
 مساوات خط مستقیم سے تعلق نہیں رکھتی گے یہ مساوات ایک نقطہ سے تعلق رکھتی گے
 یا یہ ناممکن ہوگی مثلاً مساوات $۱ + ۲ لا - ۲ - ط = ۰$ ایک ایسی نقطہ سے
 تعلق رکھتی ہے جسکے وتر $لا = ۰$ اور $ر = ط$ کیونکہ سوای اس قیمت $لا$ کی کوئی
 اور قیمت اسکی ایسی نہیں ہو سکتی ہے کہ جسکی وسیلہ سے ایک دوسری قیمت $ر$ کی حاصل
 ہو اور مساوات $ر + لا + ط - ۱ = ۰$ ناممکن ہے کیونکہ کوئی قیمت $لا$ کی ایسی
 نہیں ہو سکتی کہ جسکی وسیلہ سے قیمت $ر$ کی بھی حاصل ہو۔

(۵) ثابت ہوگا کہ مساوات خط مستقیم کی $ر = ط + لا$ میں اور مقام
 اس خط کا موقوف دو مقداروں $ط$ اور $ر$ پر خط معلوم سے مراد ہی کہ اسکی
 مقام دیا ہو ایسی یعنی مقدارین $ط$ اور $ر$ کے معلوم ہیں دریافت کرنے کے لیے

نقطہ سی مراد ہی کہ ہم اسکا مقام دریافت کرنا چاہتی ہو اور اس خطی اس مطلب کے ہم
 $r = \text{طلا} + \text{ص}$ ایک مساوات فرض کرتے ہیں اور بوسیدہ شرائط سوال کے مطابق
 $r = \text{طلا} + \text{ص}$ کی دریافت کی جاتی ہیں اور اگر ایک ہی مقدار انہیں معلوم ہو سکی
 تو دریافت ہوتا ہے کہ سوال کافی نہیں ہیں واسیے سفر کرنے مقام خط کے

نقطہ معلوم ہی ہم سمجھتے ہیں کہ اسکے اوتار معلوم ہیں اور ہم کثرت لاء اور کثرت اور
 نقطہ معلوم کی فرض کیا کریں گے واسطے اختصار کی اس نقطہ کو کہ جس کے اوتار
 لاء اور کثرت ہیں نقطہ لاء اور کثرت کا تعبیر کر سکیں اور اس سے اس خط کو کہ جس کے
 مساوات $r = \text{طلا} + \text{ص}$ ہی خط $r = \text{طلا} + \text{ص}$ کا تعبیر کر سکیں۔ اگر ایک

شکل کے ثابت کرنی میں دو مساواتیں $r = \text{طلا} + \text{ص}$ اور $r = \text{طلا} + \text{ص}$
 لکھی جاویں تو ان دونوں مساواتوں میں لاء اور کثرت مختلف سمجھنی چاہئیں
 (۳۹) بڑی افوس کی بات ہے کہ اگلی شکل میں جو کہ در باب خطوط مستقیم
 ہیں ہم یہ ایک سی مساواتوں کو کام میں ہی لے سکتے ہیں۔

شکلین در باب خطوط مستقیم کے

(۴۰) دریافت کرو مساوات ایک ایسی خط کی جو کہ گزرتا ہو ایک نقطہ مفروضے
 چونکہ نقطہ مفروضہ ہی اس سے اس کے اوتار معلوم ہو سکی تو اب فرض کرو کہ لاء اور
 کثرت اسکے اوتار ہیں اور فرض کرو کہ مساوات خط مستقیم کی یہ ہے $r = \text{طلا} + \text{ص}$
 اور ظاہر ہے کہ مساوات خط مستقیم کے نقطہ مفروضہ پر یہ ہو جائیگا کہ $r = \text{طلا} + \text{ص}$
 $+ \text{ص} = \text{طلا} + \text{ص}$ لکھو اس قیمت ص کو مساوات اول میں

$\therefore r = ط + ۱۵ - ۱۵ ط$ یا $r - ۱۵ = ط (۱۵ - ۱۵)$ نہایت آسان
 طریقہ واسطے دور کرنی مقدار ص کے یہی تفریق کرو مساوات دوم کو مساوات
 اول میں سے اور یہ طریقہ اکثر اختیار کیا گیا ہے چونکہ $ط$ جو کہ سمت خط کو مقرر کرتا ہے
 اس مساوات میں معلوم نہیں ہے تو معلوم ہوا کہ لا نہایت خطوط نقطہ مفروضہ سے
 کھج سکتے ہیں یہ بات علم ہندسہ سے بھی ثابت ہو سکتی ہے اگر نقطہ مفروضہ محور $لا$ پر
 ہو تو $r = ۰$ کی ہوگا $\therefore r = ط (۱۵ - ۱۵)$ اور وہ محور کے پر ہو تو $لا = ۰$
 $\therefore r - ۱۵ = ط لا$ اگر ایک یا دو نو اوٹار نقطہ مفروضہ کی منفی ہوں تو علامت
 اوٹار کی موافق اس فرض کے لکھنی چاہیے مثلاً اگر نقطہ مفروضہ محور $لا$ پر ہو یعنی منفی
 سمت کی طرف نقطہ آئی ہو تو اس کے اوٹار $-لا$ اور $-$ ہوگئی ہو اس واسطے صورت
 مساوات کی یہ ہو جاوے گی $r = ط (۱۵ + لا)$

(۴۱) دریافت کرو مساوات ایسی خط کی جو کہ گزرتا ہو دو نقطوں مفروضہ $لا$ اور ۱۵
 اور ۱۵ اور $لا$ اور r سی فرض کرو کہ مساوات مطلوب یہ ہے
 $r = ط + لا$ ص (۱) اور چونکہ یہ خط گزرتا ہے دو نقطوں مفروضہ سی واسطے
 یہ دو مساواتیں ہمیں حاصل ہوگئی $۱۵ = ط + لا$ ص (۲)
 $۲۵ = ط + ۲لا$ ص (۳)

تفریق کر اسی (۲) کو (۱) میں سے حاصل ہوگا یہ $r - ۱۵ = ط (۱۵ - لا)$
 (۴۱) اور تفریق کر میں (۳) کو (۲) میں سے حاصل ہوگا یہ
 $r - ۲۵ = ط (۱۵ - ۲لا)$ $\therefore ط = \frac{۱۵ - r}{۱۵ - ۲لا}$ جبکہ لکھی ہوئی نسبت

ط کی مساوات (۲۱) $\frac{۱۵-۱۴}{۱۵-۱۳} = ۱۵-۱۴$ (۱۵-۱۳) اور
دو شرطوں کے وسیلہ سے مقدارین ط اور ص کی دریافت ہوئی ہیں اور ان کی دور
کرنی سے مقام خط کا مقرر کیا گیا ہے اور یہی ہونا چاہئے تھا کیونکہ دونوں نقطوں
میں سے صرف ایک خط گذر سکتا ہے صورت اس مساوات کی مختلف ہوگی سو ان
مختلف فرضوں کی مثال اگر نقطہ ۱۵ اور ۱۴ محور لایا ہو تو $۱۵-۱۴ = ۱$

$$\therefore ۱۵-۱۴ = \frac{۱۵}{۱۵-۱۴} = ۱۵-۱۴ \text{ اور اگر وہ محور کے پر ہو تو } ۱۵-۱۴ = ۱$$

$$\therefore ۱۵-۱۴ = \frac{۱۵}{۱۵-۱۴} = ۱۵-۱۴ \text{ اور اگر وہ نقطہ شروع پر واقع ہو تو}$$

$$۱۵-۱۴ = ۰ \text{ اور } ۱۵-۱۴ = ۰ \therefore ۱۵-۱۴ = \frac{۱۵}{۱۵-۱۴} = ۱۵-۱۴$$

$$۱۵-۱۴ = \frac{۱۵}{۱۵-۱۴} = ۱۵-۱۴$$

$$\therefore ۱۵-۱۴ = \frac{۱۵}{۱۵-۱۴} = ۱۵-۱۴$$

یہ مساوات اخیر کی بطور آئینہ کی بھی حاصل ہو سکتی ہے مساوات اس خط کی جو کہ نقطہ
شروع سے گزری یہ ہونی چاہئے کہ ط ۱۵ (۳۱) یہاں ط تغیر کرتا ہے مگر اس
زاویہ کو جو کہ خط مستقیم بناتا ہے محور سے اور چونکہ یہ خط گذرنا ہی نقطہ ۱۵ اور
۱۴ سے ہو گا ط = $\frac{۱۵}{۱۵-۱۴}$ ثابت ہو گا کہ $\frac{۱۵}{۱۵-۱۴} = ۱$ اگر ایک خط گذری ہیں
نقطہ میں سے تو نسبت آئینہ ضرور ہونی چاہئے ان نقطوں کے اوتار میں

$$(۱۵-۱۴) - (۱۵-۱۴) + (۱۵-۱۴) = (۱۵-۱۴) - (۱۵-۱۴) + (۱۵-۱۴) = ۱۵-۱۴$$

(۲۷۲) دریافت کرو مساوات ایسے خط کی جو کہ گذر کے نقطہ مفروضہ سے تضییع کرتا

ایک محدود خط کو فرض کرو کہ خط دیا ہوا محدود درمیان ان نقاط کی ۱۵ اور ۱۴

اور لا ۲ اور ۲ اس واسطے اوتار لفظ تنصیف کے یہ ہیں $\frac{لا + لا}{۲}$ اور $\frac{۲ + ۲}{۲}$ یہاں صاف معلوم ہوتا ہے کہ مساوات مطلوب یہ ہے کہ $۲ - ۲ = ۰$

$$ب (لا - لا) = (۲ - ۲) \frac{۲ - ۲ + ۲}{۲ - لا + لا} = (لا - لا)$$

(۳۳) دریافت کرو مساوات ایسے خط کے جو کہ متوازی ایک خط مفروضہ کی بحر

فرض کرو کہ $د = ط + لا + ص$ (۱) دیا ہوا خط ہے

د = $ط + لا + ص$ (۲) وہ خط ہے جس کا دریا کرنا مطلوب ہے

چونکہ خطوط متوازی ایک دوسری کے ہیں اس واسطے زاویہ جو کہ یہ خطوط محور لائی ہو گئے

مساوی ہوں گے یا $ط = ط$: خط مطلوب یہ ہے کہ $د = ط + لا + ص$ (۳)

یہاں مقدار ص کے ایک شرط سی معلوم نہیں ہو سکتے ہیں کیونکہ بیشمار خط ایک اور خط

مفروضہ کے متوازی کھینچ سکتے ہیں لیکن اگر ایک اور دوسری شرط دی جائے تو ص

معلوم ہو سکتے ہیں مثلاً اگر خط مطلوب ایک اور لفظ مفروضہ سی لا اور د کی گز

توصورت مساوات (۲) کی یہ ہو جائیگی کہ $د - ۲ = ط (لا - لا)$

اس واسطے صورت مساوات (۳) یہ ہو جائے کہ $د - ۲ = ط (لا - لا)$

(۳۴) دریافت مقام تنصیف دو خطوں مفروضہ ب س اور ی د کا آئین

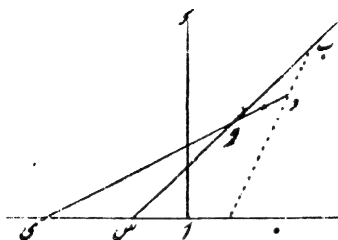
صرف دریافت کرنا د کا ہے جہاں کہ دونوں خط تقاطع ایک دوسری کو کرتی ہیں

یہ خط ہر ایک لفظ د پر اوتار دونوں خطوں کی ایک ہی ہو گئی اور مان لو کہ وہ

ع اور ج ہیں اب فرض کرو کہ $د = ط + لا + ص$ مساوات س ب کی ہے اور

$د = ط + لا + ص$ مساوات ی د کی ہے تو اب ط ہر ایک لفظ آ پر

$$ح = طع + ص = ط'ع + ص' \therefore ع = \frac{ص - ص'}{ط - ط'}$$



$$\text{اور } ح = طع + ص$$

$$= طص' - ط'ص + ص$$

مثال (۱) دریافت کرو نقطہ

تقاطع ان خطوں کا جسکی مساواتیں

یہ ہیں $ر = ۳لا + ۱$ اور $ر = ۲لا - ۴$ بیان $ع = ۰$ اور $ص = ۳$

$ح = ۱۰$ مثال (۲) دریافت کرو نقطہ تقاطع ان خطوں کا جسکی مساواتیں ہیں

$ر = لا$ اور $ر = ۳ - لا$ بیان $ع = ۱$ اور $ح = ۱$ اگر ایک

تیسرا خط جسکی مساوات $ر = ط'لا + ص'$ ہی گزری اس نقطہ تقاطع سے تو نسبت

امثال میں یہ ہوگی $(طص - ط'ص) - (طص' - ط'ص) + (ط'ص) -$

$$ط'ص = ۰$$

(۵) دریافت کرو مساوی اور جیب مستوی اور جیب التمام اوس زاویہ کی جو کہ بیان دو

خطوں کی ہے فرض کرو کہ $ر = ط'لا + ص$ مساوات خط $س$ کی ہے

اور $ر = ط'لا + ص$ مساوات خط $س'$ کی ہے

اور فرض کرو کہ $ر$ اور $ر'$ وہ زاویہ ہیں جو کہ یہ دونوں خط ہوائی میں محور

تواپ $ص$ دہ = $ص$ ی و $ص = (ر - ر')$ = $\frac{ص - ص'}{ط - ط'}$

اور $ج$ دہ = $ج$ ی و $ج = (ر + ر')$ = $\frac{ج + ج'}{ط + ط'}$

اور $ج$ دہ = $ج$ ی و $ج = (ر + ر')$ = $\frac{ج + ج'}{ط + ط'}$

اور $ج$ دہ = $ج$ ی و $ج = (ر + ر')$ = $\frac{ج + ج'}{ط + ط'}$

(۴۶) دریافت کرد و مساحت خط تقسیم که چونکه بناتای ایگایه زاویه مفروض و دیگر

خط مستقیم فرض کرو کہ $y = ax + b$ مساوات خط مفروضہ میں سے ایک ہے

..... اور $k = ط + لا + سس$ مساوت خیز مطلوب ہی آئی ہے۔

فرض کردم = ماس زاویہ مفروضہ دو ب تو اب ظاہری کہ ط = مس دی

$$\frac{م - ط}{ط + م} = \frac{مسس - ل - مسس - د}{ا + مسس - ب - ل - مسس - د} = \frac{مسس (ب - ل - د)}{ا + مسس - ب - د}$$

گاہی سے اس قیمت طے کو سادہ دویم میں ہمیں حاصل ہو گا یہ

۴۔ $\frac{p-q}{p+q} = r$ لا+صح اگر خط مطلوب نقطہ مفروض لآا اور تواریسی کرے

نویس = $\frac{b-a}{b+a}$ (لا-لا) اگر نقطه مفروضه لا، اور کا کام

تو صرف خط دوسری ہی کا نہیں بلکہ ایک دوسرا خط (نقطہ دار جو کہ شکل میں ہی)

کیج سکتا ہی بناتی ہوئی ایک زاویہ مفروضہ خط بس سی اور اس کی مساوات بطور

سابقہ یہ ہوگی $s-s_1 = \frac{p+p_1}{p-p_1} (u-u_1)$ اور اب ظاہر ہے کہ دونوں

مسواقی صورت آئینہ میں داخل ہو گئے۔ و۔ س۔ ۱ = $\frac{p \pm p}{p \pm p}$ (۱۱-۱۱)

شدا وہ دو خط جو کہ لہز کی نقطہ آتے بناتی ہیں ایک زاویہ ۵۴° درجہ کا خط ہر

مسماواتون آئندہ کی وسیدہ سی دریافت ہو سکتی ہیں

$$(14 - 1) \frac{1 - b}{1 + b} = 15 - 1$$

$$(14 - U) \frac{b+1}{b-1} = 15 - 5$$

مساحت اس خط کہ جو کہ نقطہ دسے گزرے، سناتا ہی زاویہ ۱۳۵° کا بھی لائے ہو

$$(U-U) = (U-U) \text{ مرسى } = (U-U) \text{ مرسى } = 1 - 1 = 0$$

(۱۶) اگر خط معلوم عمود خط مفروض پر ہو تو تمام انہا نیت پر ایک ہوگا

$$\frac{ط}{ط+م} = \frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط} = \frac{ط}{ط}$$

سادت اوس خط کی جو کہ عمود خط مفروض و = ط + ص پر ہی ہم ہوگی

$$ر = \frac{ط}{ط} + ص$$

اور وہ ہمہ کی کیچو عمود دسی کا بے پر شکل آئندہ مین تو ط = مس دی لا =

$$مس دی مس = مم دس لا = \frac{ط}{ط} + ص$$

یہاں سی ط ہر سی کہ اون دو خطوں

ستقیم کی ساد اتونین جو کہ عمود ایک دوسری پر مین ہمیں یہ حاصل ہوگا

$$ط + ط = ۱$$

و برکس اسکے اگر دو خطوں کی ساد اتونین یہ ثابت ہو کہ ط + ط =

$$۱$$

تو معلوم ہوگا کہ یہ دونوں خط عمود ایک دوسری پر مین - اگر خط عمود

$$گذری نقطہ لا و دسی ہی تو ہر سادت یہ ہوگی کہ - ۱ = \frac{ط}{ط} + ص$$

اور واضح ہو کہ اس سادات کی مختلف صورتیں ہو سکتی ہیں موافق مختلف مقام

$$نقطہ لا اور دسی کی مثلاً اگر وہ خط جو کہ عمود خط و = ط + ص پر گذری نقطہ$$

شدہ دسی ہی تو اسکے سادت یہ ہوگی کہ - ۱ = \frac{ط}{ط} + ص کیونکہ یہاں دونوں لا

$$اور دسی = ۱$$

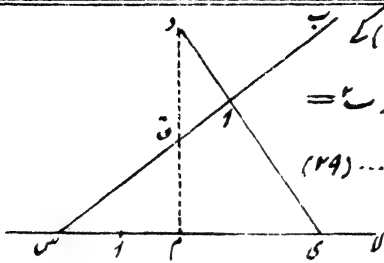
(۱۷) دریافت کرد طول ایک خط کا جو کہ کہیا گیا ہی عمود نقطہ مفروض د (لا و

$$۱) سے خط مفروض ر ب پر فرض کرد کہ و = ط + ص (۱)$$

سادات سب ہی تو - ۱ = \frac{ط}{ط} + ص (۲) سادات

عمود دسی کی ہوگی - فرض کرد کہ ب = دو اور ح او تار نقطہ و

ہندسہ



کی بین جو کہ بوسید (۱) اور (۲) کے
آسانی سے دریافت ہو سکتی ہیں تو

$$(۲۹) \dots ۲(۱۵-ع) + ۲(۱۵-ع)$$

$$= ۲(۱۵-ع) \text{ سی ج}$$

$$۱۵ - \frac{۱}{۲} - (۱۵-ع) = ط + ص \text{ موانعی مساوات (۱) کے}$$

$$ط + ص = ۰$$

$$\therefore (ط + \frac{۱}{۲}) (۱۵-ع) = ۱۵ - ط - ص$$

$$\therefore ۱۵ - ط = \frac{ط}{۱+\frac{۱}{۲}} = \frac{۲ط}{۲+۱} \text{ اور ج - ۱۵ = } -\frac{۱}{۲} - (۱۵-ع)$$

$$\therefore ۲(۱۵-ع) + ۲(۱۵-ع) = ۲$$

$$= ۲(۱۵-ع) + \frac{۱}{۲} =$$

$$= \frac{۲ط+۱}{۲}$$

$$= \frac{۲ط}{۲(۲ط+۱)} = \frac{۱}{۲+۱} = \frac{۱}{۳}$$

$$\therefore ۲ = \frac{۲ط+۱}{۲} \text{ اور پر کی علامت کو اوستو}$$

استعمال میں لانا چاہیے جبکہ نقطہ مفروضہ خود مفروضہ کے اوپر اور نیچے کے علامت کو اوستو

وقت جبکہ وہ نیچے ہو - اگر خط مفروضہ نقطہ شروع سے گزری تو ص = ۰

$$\therefore ۱۵ - ط = \frac{۲ط+۱}{۲} \text{ اور اگر نقطہ شروع نقطہ مفروضہ ہو تو لا = ۰ اور}$$

$$۱۵ = ۰ \therefore ۲ = \frac{۲ط+۱}{۲} \text{ صورت واسطے کی ایک اور طور سے بھی حاصل ہو سکتی ہے}$$

چونکہ مساوات $ط + ص = ۰$ ہے ایک نقطہ سے دے کی ہو سکتی ہے اس لیے اس

فرض کرو کہ آلفظ شروع اوتار کا اور آ ب محو لا اور آ، محو ر کا ہی اور فرض کرو کہ اوتار
نقطہ س کی لا اور آ ہیں ب لا ہین ترا ب ساد آس کی یہ ہو
ر = $\frac{لا}{لا}$ سوانق (۱۴) کی سیواسطی ساد آ ب کی یہ ہوگی ر = ط (لا - لا)
= $\frac{لا}{لا}$ (۱۵) اور ساد آ ب س کی یہ ہوگی ر = $\frac{لا}{لا}$ (۱۶) = $\frac{لا}{لا}$ (۱۷)
(لا - لا) (۱۸) یا ر = $\frac{لا}{لا}$ (۱۹) کیونکہ ر = ۰ = ساد آ ب کی یہ ہوگی
ر = ط = $\frac{لا}{لا}$ (۲۰) چونکہ نقطہ د پر جو کہ مقام تقاطع خطوط ب د اور
آ کی کا ہی) وتر دو نون ساد آ ب د اور آ میں ایک ہی ہوگا سیواسطی جبکہ
ہمیں ان دونوں قیمتوں کے مساوی ایک دوسرے کو حاصل ہوگا یہ = $\frac{لا}{لا}$ (۲۱) =
= $\frac{لا}{لا}$ (۲۲) یا $\frac{لا}{لا}$ (۲۳) یا $\frac{لا}{لا}$ (۲۴) یا $\frac{لا}{لا}$ (۲۵) یا $\frac{لا}{لا}$ (۲۶) یا $\frac{لا}{لا}$ (۲۷) یا $\frac{لا}{لا}$ (۲۸)
یعنی وتر الوض نقطہ د کا ساد نقطہ س کے وتر الوض کا ہی سیواسطی ثابت ہو سکا
کہ اگر ایک مثلث کی تینوں خطوں کو تضیف کر کے نقاط تضیف سے عمود کھینچے جائیں
تو یہ تینوں عمود بھی ایک ہی نقطہ پر ملتی ہوں گے۔

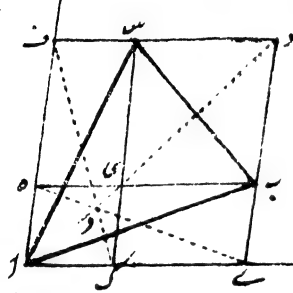
(۵۱) ہمیں اب تک محو ر کو متقاطع علی القوائم فرض کیا ہی لیکن اگر وہ عمود ایک دوسرے
پر نہ ہوں تو ساد آ ساد آ مستقیم میں محاس اوس زاویہ کا جو کہ خط مذکور بناتا ہی
محو لا سی نہیں ہوگا فرض کرو کہ ر = اوس زاویہ کی جو کہ محو ایک دوسرے بناتی ہی
اور لا = اوس زاویہ کی جو کہ خط مستقیم بناتا ہی محو لا سی تو ب ط = $\frac{لا}{لا}$ (۲۹)
= $\frac{لا}{لا}$ (۳۰) جس صورت میں بھی مساوی اس فاصلہ کے ہی جو کہ
واقع ہی درمیان نقطہ شروع اور اوس نقطہ کی جہاں کہ خط مذکور کا مآ ہی محو ر سے

اسپواسطی = جس (ر-ر) لا + ص چونکہ یہ صورت مثل صورت ر = ط لا + ص
 کی ہے تو تمام صورتیں جو کہ ہم ثابت کر آئی ہیں وہ اس صورت میں بھی صحیح ہوگی کیونکہ
 اوکلی ثبوت میں کسی طرح کی تبدیلی جس (ر-ر) میں نہیں آئی گی واضح ہو کہ صورت ہم
 اور ۱۴ اور ۱۵ اور ۱۶ اور ۱۷ میں کسی نوع تبدیلی واقع نہوگی۔ درپا کر دیا
 (۲) اس زاویہ کا جو کہ واقع ہے در میان دو خطوں مفروض کا فرض کرو کہ (ر = ط لا + ص اور
 ر = ط لا + ص) مساویں خطوں مفروض کی ہیں۔ قیمت ط = جس (ر-ر)
 سی ہم درپا کر سکتے ہیں مس ر = ط جس ر اور اسپواسطی سے مس ر = ط جس ر
 یہاں سی معلوم ہو کہ م = مس (ر-ر) = $\frac{(ط-ط) (ط-ط)}{ط+ط+ط+ط}$ درپا کر دیا
 مساوت ایک خط کی جو کہ گزرتی نقطہ مفروض لا اور ر سی بناتا ہی ایک زاویہ
 مفروض ایک خط مفروض سے فرض کرو کہ م مماس زاویہ مفروض کی ہے اور ر = ط +
 ص خط مفروض ہے اور ر = ط (لا-لا) خط مطلوب ہے ہواقی مجمل
 صورت کی ط = $\frac{ط جس ر - م (ط+ط) (ط+ط)}{ط جس ر + م (ط+ط)}$ اسپواسطی مساوت مطلوب یہ ہوگی
 ر = ط = $\frac{ط جس ر - م (ط+ط) (ط+ط)}{ط جس ر + م (ط+ط)}$ اگر خطوط مذکور عمود ایک دوسرے
 پر ہوں تو م = $\frac{ط+ط}{ط+ط}$ تو اب مساوت مطلوب یہ ہوگی
 ر = ط = $\frac{ط+ط}{ط+ط}$ درپا کر دیا کہ طول ایک عمود کا جو کہ کسی کسی
 ایک نقطہ مفروض ہی ایک خط مفروض پر ہی مساوت (۲) فقرہ (۱۴) کی مساوت
 گذشتہ کام میں لاؤ جو کہ ابھی ثابت کر آئی ہیں اور اخصیا کر دہی طریقہ درپا کر دیا
 طول عمود کا جو کہ ہم لکھتے آئی ہیں تو حاصل ہو گا کہ $\frac{(ط-ط) (ط-ط)}{ط+ط+ط+ط}$

واضح ہو کہ اس قسم کی محور و محور حقیقی الاسکان کام میں نہیں لاتی ہیں اور یہ فائدہ مند
 وہاں ہوگی جہاں کہ نقطہ او خط وسطی بخت کرتی ہیں اور جہاں کہ ذکر زاویہ کا ہوگا وہاں
 اسکا استعمال نہیں ہو سکتا ہی شکل آئندہ کو بطور مثال کے درج کرتی ہیں۔

(۵۲) اگر ایک مثلث کی اضلاع کو قطر فرض کر کے ایسی متوازی الاضلاع کہیں جائیں

جتنے اضلاع متوازی دو خطوط مفروض کی ہوں تو اقطاران متوازی



اضلاعوں کی ایک ہی نقطہ پر ملین گے

فرض کر دو کہ اب س مثلث ہی اور آ

اور آ خطوط مفروضہ ہیں اور سی ب دس

اور س ف ایک اور ہ ا س ب

متوازی الاضلاع ہیں تو اب اقطاران متوازی اور ک اور ہ سے نقطہ ق پر ملنے

ہوگی فرض کر دو کہ آ نقطہ شروع ترجیحی محورن آ آ اور آ کا ہی اور فرض کر دو کہ آ

اور آ اوتار نقطہ ب کی ہیں اور لام اور کم س اب درپٹ کر مساوی

خط دسی کی فرض کر دو کہ مساوی اس خط کی $د = ط + ص$ تو صورت اس مساوی کے

نقطہ ق پر یہ ہوگی کہ $ط + ص = د$ $د - د = کم$ $ط - (ط - ص) = کم$ اور شکل

مساوی کے نقطہ ق پر یہ ہوگی کہ $د - کم = ط$ $(ط - لام) - د = کم$ $د - کم =$

$\frac{د - کم}{ط - لام} = \frac{د - کم}{ط - لام}$ اور اب درپٹ کر مساوی و ک کی اور فرض

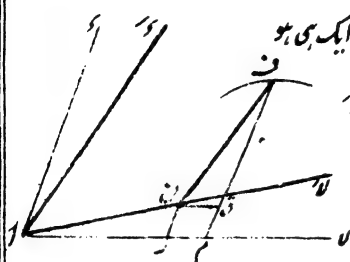
کر دو کہ مساوی اس کی $د = ط + ص$ تو نقطہ ق پر کہ $د = ۰ + ص$ $د = ص$

$د - کم = ط$ اور مساوی نقطہ ق پر $د - کم = ط$ $د - کم = ط$ $د - کم = ط$

— $\frac{25}{100}$ لا (۲) اور اب دریافت کرو مساوت ہے کی فرض کرو کہ
اسکی مساویہ یہی ہے $\frac{25}{100}$ لا ۴ ص اور نقطہ ہ پر ۱۰ = ۴ ص ۵ = ۱۰ ص
طا اور نقطہ سے پر ۱۰ = ۱۰ طا ۵ = ۱۰ ص ۱۰ = ۱۰ ص ۱۰ = ۱۰ ص چونکہ
نقطہ و بر قیمتین اور افراطی متوازی الاضلاع اسپین ہو گئی سیوا اب قیمتین
و کی جو کہ (۱) اور (۲) مین بن مساویہ ایک دوسرے کی تو اب حاصل ہو گا ع =
 $\frac{۱۰۰}{۱۰۰} - \frac{۲۵}{۱۰۰}$ اسپر جسے جبکہ لکھی یعنی قیمتین و کی جو کہ (۲) اور (۳) مین مین
 $۱۰۰ - ۲۵ = ۷۵$ مساوی ایک دوسری کی تو اسکی وسیلہ قیمت ع کی دہی حاصل ہوگی جو کہ مین
ابھی نکالی ہی تھانسی ثابت ہوا کہ وتر العرض ہر ایک دو قطر و کی مساوی مین
یعنی اگر ایک بار دو قطر تقاطع کے وسیلہ سے قیمت وتر العرض فقط تقاطع کی نکالیں
تو برابر اس قیمت وتر العرض کی ہوگی جو کہ دو قطر و کی تقاطع حاصل ہوگی یہاں
صاف معلوم ہوتا ہے کہ تین افراطی اور ہ سے اور تک ایک ہی نقطہ و پر ملتی ہیں
اسی طور ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ایک مثلث تینوں زاویوں سے تین خطوط واسطی
کرنی اضلاع مقابل کے کیسے جاویں تو وہ تینوں ایک ہی نقطہ پر ملیں گے۔

شروع آ سے شمار کئی جاتی ہیں -

(۵۵) بدلو ایک مساوات کو جس کے ترچھی بحرین ایک ایسی مساوات سی جس کی اور ترچھی



فرض کرو کہ ω_1 اور ω_2 اصل محور اور ω_3

اور اس کی محو رہن

اصلی اور محفوظ کی ہیں

اور ان = لا
 نف = ک

نئی اور تار لفظ کے ہیں

فرض کرو کہ زاویہ لا 1 = ک

فرض کرو کہ زاویہ $\angle A = 90^\circ$ ک

اور $\bar{L}1\bar{L} = \bar{L}$ اور $\bar{L}1\bar{L} = \bar{L}$ اور کسی خط n کا متوازی m کی اور

نق متوازی اتم کی تور = م ف = م ق + ق ف = ن ر + ق ف =

$$1 \text{ ان جس ن } \frac{1}{1} + \text{ف لا} \times \frac{\text{جس و ن ق}}{\text{جس و ن}} = \frac{\text{لا جس ر}}{\text{جس ر}} + \frac{\text{جس ر}}{\text{جس ر}} \text{ اور لا} = 1 \text{ م}$$

$$= \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \dots = \frac{1}{1+r} \left(1 + \frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \dots \right)$$

$$\frac{\text{جس (ک) - (۲۴) جس (ک)}}{\text{جس (ک)}} = ۲۴ \therefore \frac{\text{جس (ک) - (۲۴) جس (ک)}}{\text{جس (ک)}} = ۲۴$$

لا جسر (ک-ر) + جس (ک-ر) = جسر

(۵۶) فرض کرو کہ اصلی محور تر جہی ہوں اور نئی محور متقاطع علی القواہم یا۔۔۔

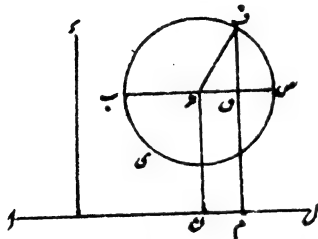
$$9. \therefore \frac{\text{لاجس ر + جہز}}{\text{جہز}} = \text{اور لاجس ر (ک) - (ر) - (جہز)}$$

(۹۸) فرض کرد که اصل محو متقاطع علی القوام یک = ۹. ∴ $r = لا$ جس

+ د جہر اور لا = لا جہر + د جہر (۵۸) اب فرض کرو کہ اصلہ اور نئی محور متقاطع علی التوہم
 بین یا = ۹۰ اور ر = ۹۰ = د = لا جہر + د جہر اور لا = لا جہر + د جہر
 (۵۹) یہ تمام صورتیں بوسیدہ پہلی صورت کی کھالی گئیں لیکن یہ بغیر کسی مدد کی بھی
 حاصل ہو سکتے ہیں پہلی اور اخیر کی صورتیں بہت مفید ہیں اور یقین ہے کہ وہ اچھی طرح
 یاد رہیں گے اگر بطور آئینہ لکھی جا دیں اگر دونوں یعنی اصلی اور نئی محور پر بھی ہوں تو
 صورتیں (۵۵) اس صورت کی ہو جا دیں گی = { لا جہر لا ۱ + د جہر لا ۱ }
 × حس لا ۱ اور لا = { لا جہر لا ۱ + د جہر لا ۱ } جس لا ۱ اگر دونوں یعنی
 اصلی اور نئی محور متقاطع علی التوہم ہوں تو صورتیں (۵۶) اس صورت کی ہو جا دیں گی
 د = لا جہر لا ۱ + د جہر لا ۱ اور لا = لا جہر لا ۱ + د جہر لا ۱ اگر مقام نقطہ
 شروع کا بھی تبدیل کیا جائے جبکہ سمت محور و کئی تبدیل کی گئی ہو تو اس صورت میں ضرر
 قیمتیں لا اور د پر مقرر ہیں ط اور ص زیادہ کرنی چاہئیں یعنی لا پر ط اور د پر
 ص زیادہ کرنا چاہئے اگرچہ یہ ط بہت آسان ہے لیکن پر بھی یہ تبدیلی عینہ علیحدہ
 کرنا چاہئی اور اگر نئی محور لا کا نیچے محور لا کے واقع ہو تو زاویہ ر کا منفی ہو گا ایسا
 اسکی جیب مستوی منفی ہوگی اور جیب التمام مثبت یہاں سی ظاہر ہوتا ہے کہ صورتوں تبدیلی
 میں واسطے اس خاص صورت کے کچھ تبدیل کرنا چاہئے چونکہ قیمتیں لا اور د کی ہر ایک
 صورتیں پہلے درجہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے تو اب یہاں سی معلوم ہوا کہ تبدیل کرنے
 اور تارس کی سطح کی تبدیلی قواسمات میں نہیں ہوتی —

(۶۰) اب کتبہ منی مقام نقطہ کا ایک سطح میں بوسیدہ ایسا گنا صفوں کے دو محوروں سے
 معلوم کیا ہی لیکن اب ہم ایک اور مفید طریقہ اسکی دریافت کرنے کا بیان کریں گے تو

ہو جاوے گی اور ان خطوں میں سے دائرہ ایک نہایت سیدھے سنگھل ہو اور اس کی خواص
بآسانی معلوم ہو سکتی ہیں گو ہم پہلی سی عام مساوات درجہ دوم سے بحث نہ کریں اس سلسلہ
قبل ازیں بیان کرنے عام مساوات کی ہم اول دائرہ کی خواص بیان کرتے ہیں۔
(۶۵) مساوات دائرہ کی اس طرح سے معلوم ہوتی ہے فرض کرو کہ r اور 1 محور



ستفاح علی القوا یم ہن اور و مرکز دایرہ

سی پ ف س کا پی اور چونکہ وہ ایک

خاص نقطہ ہی اس واسطے اوسکی دوترا

مقدارین مقررہ ہیں اور اس پر سطح

فرض کرتی ہیں ہم کہ $\bar{a} = \bar{p}$ اور $\bar{n} = \bar{v}$ اور فرض کرو کہ $\bar{a} = \bar{m}$ لا ادا

مف = دو ترہن اوس نقطہ شدات کی جو محیط بر واقع ہی اور نصف قطرد

نقۃ آب ظاہری کہ قو = م ن = ۱ م - ۱ ن = ۱ ط - ۱ اور فق =

مف - قم = م - دن = س - ص اور چونکہ دق + ف ق = وف =

∴ (۱-ط) + (۲-ص) = نتیۃ اور یہی ہر مساوت عامہ دایرہ کی اگر محور لے

ماہی مرکز دایرہ پور گدڑی تو ان دونوں صورتوں میں پیدا علمیہ مساواتیں حاصل

بنویسند: $(r-ص) = r + r(ط-ص)$ (۱) $r = r(ط-ل) + r$ (۲) ...

اگر نقطہ شروع کسی نقطہ مثل جی محیط دایرہ پر منطبق ہو جائے تو ظاہر ہے کہ یہ مساوات

حاصل ہوگی $6 \times 2 = 12$ لیکن اگر مساحت عامہ دائرہ کی صورت مفصلہ

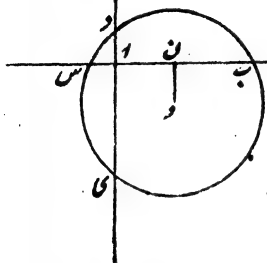
دہشت گردین اور اوسمن کی طاقت کی حقادرچ کرین تو ہمیں دست حاصل ہوگا

۲-۲ ص ۲ + لا ۲ - ۲ ط ۱ = ۰ (۳) اگر نقطہ شروع مقام ب پر ہو
 اس صورت میں ب و محور لا کا ہوا جادگیا اور ۰ = ص ۰ اور ط = نقی
 اور ۰ = ص ۲ + لا ۲ - ۲ نقی لا = ۰ یعنی ۲ = ۲ نقی لا - لا ۲ (۴)
 اب اگر فرض کریں کہ نقطہ شروع مرکز دایرہ پر ہی تو ظاہر ہے کہ ط = ۰ اور ص = ۰
 اور ہر چھ سادہ عام اس شکل کی ہو جائیگی ۲ + لا ۲ = ص ۲ (۵) یہ سب
 مساواتیں بہت مفید ہیں — (۶) اگر سادہ عام دایرہ کی

صورت مفصل دریافت کریں تو حاصل ہوگا یہ ۲ + لا ۲ - ۲ ص ۲ - ۲ ط ۱
 + ۲ ص ۲ - نقی ۲ = ۰ اب ظاہر ہے کہ اس سادہ عام سادہ درجہ دوم میں
 فرق ہی کہ اسپن سر ۲ اور لا ۲ عدد ایک ہی اور وہ جزو جمین حاصل ضرب لا ۲
 ہوتا ہی اسپن نہیں ہے۔ اگر کوئی سادہ عام دایرہ کی دیجا کہ اور اسی اس سادہ
 عام دایرہ ہی مطابق کریں تو ہر کو مقام مرکز کا اور مقدار دایرہ کی معلوم ہو جائیگی
 مثلاً فرض کرو کہ کسی دایرہ کی یہ سادہ عام ۲ + لا ۲ + ص ۲ - لا ۱ - ۵ = ۰
 اور اگر اسکو اور سادہ عام دایرہ کو آپس میں مطابق کریں تو یہ دریافت ہوگا
 ص = ۲ - ۲ اور ط = ۲ اور ۲ + ص ۲ - نقی ۲ = ۰
 ط ۲ + ص ۲ = ۵ + ۴ = ۹ نقی = ۵ فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محور لا پر
 ۱ اور لا ۱ کا ۱ پر پائش کرو ایک خط ۱ = ص ۴ اور خط لا ۱ پر
 قائم کردہ نیچے کی طرف عمود ن = ۲ پس ظاہر ہے کہ مرکز دایرہ کا ہوگا اور
 اس مرکز پر ایک دایرہ بناؤ کہ جسکا نصف قطر ہو پس دایرہ مطلوب ہے وہ

وہ نقاط جہاں دائرہ محور لاکو کا شتاسی دریافت ہو جاتی ہیں

جسوقت $x = 0$ کی فرض کریں



$$\therefore لا^2 - لا - ۵ = 0$$

$$لا = ۵ \pm \sqrt{۲۶} \therefore اب = ۵ + \sqrt{۲۶}$$

اور $س = ۵ - \sqrt{۲۶}$ اسطور اگر $لا = 0$

تو ہم پاتی ہیں کہ $ا = ۱$ اور $ی = -۵$

(۶۷) نہایت سہل ترکیب بنانی دائرہ کی جسکی مساوت معلوم ہو یہ ہے کہ مساوت

مفروض کو اس صورت کی طرف تحویل کریں $(۵ - ص)^2 + (لا - ط)^2 = ۲۵$

مثلاً اگر مساوت دائرہ کی یہ ہو $لا^2 + س^2 + ۵لا + ۲س = ۰$ تو غلط مساوت

جبر اور نقصان $\frac{س^2}{۲۵}$ اور $\frac{لا^2}{۲۵}$ سے یہ حاصل ہوتا ہے $س + ۵ + \frac{س^2}{۲۵} + لا + \frac{لا^2}{۲۵}$

$$+ لا + \frac{لا^2}{۲۵} + ی - \frac{س^2}{۲۵} = ۰ \therefore (۵ + \frac{س}{۲۵})^2 + (لا + \frac{لا}{۲۵})^2$$

$$= \frac{س^2}{۲۵} + ی - \frac{س^2}{۲۵} \text{ ی پس اس صورت میں صاف ظاہر ہے کہ } -\frac{۲}{۲۵} \text{ اور } \frac{س}{۲۵} \text{ دو تر}$$

مرکز کی ہیں اور $\sqrt{\frac{س^2 + ۲}{۲۵}} - ی$ نصف قطر دائرہ مطلوب کا ہے۔ مثالین

اس طریقہ کی یہ ہیں (۱) $لا^2 + س^2 + ۵س - ۴لا - ۸ = ۰$ پس موافق ترکیب

گذاشتہ کی لازم ہے کہ $لا$ اور $لا$ کی نصف سر و کی مجذور کو زیادہ اور کم کریں

اور \therefore حاصل ہوگا یہ $لا^2 + س^2 + ۵س + ۴لا - ۴لا - ۸ = ۰ \therefore (۲ + س)^2$

$$+ (لا - ۲)^2 = ۲۴ \therefore$$
 معلوم ہوا کہ دو وتر مرکز دائرہ مطلوب کے $۲ -$

اور $ط = ۲$ ہیں اور نصف قطر ۴ ہی مثال (۲) $لا^2 + س^2 - ۲لا - ۲س - ۴لا$

۱۰ = ۱ + ۰ جواب ط = ۱ اور ص = ۱ اور نق = ۱۳ مثال (۳)

۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ = ۳ جواب ط = ۲ اور ص = ۲ اور نق = ۳

مثال (۴) ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ = ۳ جواب ط = ۲ اور ص = ۲ اور نق = ۳

ص = ۲ اور نق = ۱۳ مثال (۵) ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ = ۳ جواب

ط = ۲ اور ص = ۲ اور نق = ۲ مثال (۶) ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ = ۳

۰ = ۱ + ۰ جواب ط = ۱ اور ص = ۲ اور نق = ۱۳

بالا میں کچھ ضرور نہیں کہ مقدار نصف کو درپٹ کر بن کیونکہ نقطہ شروع محیط دایرہ پر

واقع ہی اور اس واسطے وہ خط جو مابین مرکز دایرہ اور نقطہ شروع کی وصل کیا جاوے

سواء نصف قطر کی ہوگا واضح ہو کہ یہی حال سب ایسی مثالوں میں ہوتا ہے جن میں خرد

اخیر یعنی مقدار مقررہ نہیں ہوتی ہے۔ مثال (۷) ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ = ۳ جواب

ط = ۲ اور ص = ۲ اور نق = ۲ مثال (۸) ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ = ۳ جواب

ط = ۳ اور ص = ۰ اور نق = ۳ مثال (۹) ۲ + ۲ = ۲ + ۲ + ۲ = ۳

جواب ط = ۳ اور ص = ۰ اور نق = ۱ آن مثالوں میں مرکز دایرہ کا

محور دیں پر واضح ہے۔ (۶۸) پہلے بیان کیا گیا ہے کہ وہ سادات

دایرہ کی جو توافق محوروں متقاطع علی القوائیم کی ہو ایک ایسی سادات درجہ دوم

کی ہوتی ہیں کہ اوس میں سر ۲ اور ۲ کا علیحدہ علیحدہ ایک ایک ہوتا ہے اور علاوہ

ازین اوس میں جزو لاء کا نہیں پایا جاتا ہے اور یہی بیان کیا گیا ہے کہ ایسی سادات

اکثر دایرہ سب متعلق ہوتی ہیں لیکن اس نجای واضح ہو کہ پہرہ قاعدہ کلیہ نہیں ہے کہ

کہ ایسی مساوات کسی دائرہ ہمیشہ متعلق ہوتی ہے کہ اسطریقہ بعض صورتیں ایسی ہوتی ہیں
 کہ مساوت دائرہ سے متعلق نہیں ہوتی بلکہ ایک خط مستقیم یا ایک نقطہ سے مثلاً
 مساوت $ک' + لا' - ۲۸ - ۵۶ + ۷۵ = ۰$ دائرہ کی معلوم ہوتی ہے لیکن اسکا
 لوکس دائرہ نہیں ہے بلکہ ایک ایسا نقطہ ہے جسکی وتر $لا = ۳$ اور $ک = ۴$
 کیونکہ مساوات گذشتہ کو بطور پر لکھ سکتے ہیں $(۵ - ۳) + (۲ - ۷) = ۲ - ۲$
 یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ $لا = ۳$ اور $ک = ۴$ اور یہی حال ہمیشہ ایسی مساواتوں
 کی ہے جن میں $لا = ۰$ یہاں سے ثابت ہوا کہ نقطہ کو بھی ایک ایسا دائرہ کہہ سکتی
 ہیں جسکا نصف قطر لامناہیت چھوٹا ہو اور دوسری مساوت $ک' + لا' - ۲۸ - ۵۶ = ۰$
 $۱۱ + ۹ = ۰$ کی صورت یہ ہو سکتی ہے $(۵ - ۲) + (۱ + ۷) = ۲ - ۲$
 لیکن اسکی وسیلہ قیمت $لا$ اور $ک$ ایسے دریافت نہیں ہو سکتے ہیں جنہی شر مساوات
 کی پوری ہو جاوے اسبواسطی ثابت ہوا کہ اسکا لوکس غیر ممکن ہے (۲۴) -
 (۶۶) دریافت کرو مساوت ماس دائرہ کی - فرض کرو کہ مرکز نقطہ شروع اوفا
 کا ہی اور $لا$ اور $ک$ دو وتر اس نقطہ کی ہیں جو محیط پر ہی اس صورت میں مساوات
 اس خط کی جو اس نقطہ پر سے گزرتا ہے یہ ہے $ک - ۲ = ط (لا - لا)$
 اور مساوت اس نصف قطر کی جو اس نقطہ پر سے گزری یہ ہوگی $ک = ط \frac{لا}{لا}$ اور
 چونکہ ماس نصف قطر عمود پر ہوتا ہے اسبواسطی $ط = - \frac{لا}{ک}$: $ک - ۲ =$
 $- \frac{لا}{ک} (لا - لا)$ یا $ک - ۲ = لا + لا - ۲$: $ک - ۲ = لا + لا - ۲$
 $ک' + لا' = ۲$ مساوات ماس $ک' + لا' = ۲$ یا دائرہ کہہ سکتی ہے

بوسید مساوات دایرہ کی کیونکہ مساوات مماس کی حاصل ہو سکتی ہے اس مساوات
 $r^2 + l^2 = n^2$ سے بوسیدہ بننے والے کو r سے اور لائن کے لائن سے اگر ہم
 فرض کریں عام مساوات دایرہ کی $(r - ص) + (ل - ط)^2 = n^2$ تو مساوات

$$\text{نصف قطر کی } (r - ص) = \frac{r - ن}{ل - ط} (ل - ط) \dots (۴۱) \therefore ط =$$

$\frac{ل - ط}{r - ص}$ اور مساوات مماس کے $r - ص = ط (ل - ل) = \frac{ل - ط}{r - ص}$
 $(ل - ل)$ بوسیدہ مساوات $(r - ص) + (ل - ط)^2 = n^2$ میں n کی مساوات
 مماس کو تبدیل کر کے اس صورت کی طرف بدل سکتی ہیں $(r - ص) (r - ص)$
 $+ (ل - ط) (ل - ط) = n^2$

(۴۰) دریافت کرو مساوات مماس کے جو کہ متوازی ایک خط مفروضہ کے مفروضہ

کر دو کہ $r = ط + ص$ خط مفروضہ ہے اور $r = \frac{ل}{r} + \frac{ل}{r}$ یا

$r + ل = ل = n$ مساوات اوس مماس کے ہی جیسا کہ دریافت کرنا منظور ہی

نہیں اس میں مقدار $ل$ اور r کے مچول ہیں اور چونکہ یہ خط متوازی ایک دوسرے

کی ہیں $\therefore \frac{ل}{r} = ط (۴۳)$ یا $\frac{ل}{r} = ط$ $\therefore r =$

$\frac{ل}{\sqrt{ل^2 + 1}}$ اگر اس قیمت r کو مساوات $r = \frac{ل}{r} + \frac{ل}{r}$ میں لکھیں

اور بجای $\frac{ل}{r}$ کی $ط$ لکھیں تو حاصل ہوگا یہ $r = ط \pm n$ $\sqrt{ل^2 + 1}$

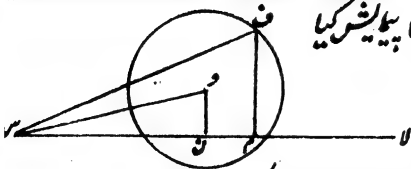
یہاں سے ثابت ہوا کہ دو مماس متوازی ایک خط مفروضہ کے کچھ سکتے ہیں۔

(۴۱) دریافت کرو مقام تقاطع ایک خط اور ایک دایرہ کا۔ فرض کرو کہ مرکز

دایرہ نقطہ شروع و وزن کا ہی اور مان لو کہ مساواتین دونوں کی یہ ہیں r

$s = ط + ص$ اور $ک + لا = ن$ اب ظاہری کہ نقطہ تقاطع پر متوازی
 لا اور ک کی دونوں کی واسطے ایک سی ہو گئی : $ن - لا = ط + ص$
 یہاں سی حاصل ہوتا ہے $لا = س + ن$ $(ط + لا - ص)$ چونکہ قیمت لا
 کی دوہین سی واسطے دو نقطوں پر خط اور دائرہ مفروض تقاطع کریں گے ان
 قیمتوں کے وسیلے نقطہ تقاطع دریافت ہو سکتی ہیں اگر $ن = (ط + لا) = ص$
 تو دونوں قیمتیں لا کی مساویں اور اس صورت میں خط مفروض دائرہ کو مس
 کر لگا اور $ن = (ط + لا)$ کم ہو $ص$ سے تو اس صورت میں خط مفروض دائرہ سے
 نہیں ملیگا۔ مثال (۱) $ک + لا = ۲۵$ اور $ک + لا = ۱$: $لا = ۱۲$
 یا $۳ - اور ۳ = ۱۲$ مثال (۲) $ک + لا = ۲۵$ اور $ک + لا = ۵$
 $۵ : لا = ۵$ یا $۵ = ۱۲$ اور ۵ یا ۵ مثال (۳) $ک + لا = ۲۵$
 خط مس کر لگا دائرہ کو یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ مثال (۴)
 سی سادات اول درجہ کو سادات دوم درجہ ایک سادات درجہ دوم کی پیدا ہو
 یہاں ثابت ہوا کہ صرف دو ہی نقطوں پر تقاطع ہو سکتا ہے۔
 (۵) اگر مجرب تر تھی فرض کئے جاوین اور زاویہ اوکئی درمیان کار ہو تو اس صورت
 میں مساوت دائرہ کی یہ ہوگی $(ص - ک) + (ط - لا) + (ک - ص)$ ۔
 (لا - ط) $ح = ن$ (۳۰) اور $ک + لا + ۲$ لا برجم $ن$ سا
 اور مس دائرہ کی ہر جگہ مرکز نقطہ شروع ہو یہاں سی معلوم ہوا کہ سادات ۲ + ۳ + ۴
 $لا + ک + ص + ی + لا + ف = ۰$ علاقہ رکھتی ہے دائرہ ایک خاص صورت میں جبکہ

محور و گن زاویہ کی جیب القام = $\frac{1}{2}$ چنانچہ مطابق کیا ہے اس مساوات کو مساوت
عامہ میں تو حاصل ہوگا $\frac{1}{2}$ جمر = $\frac{1}{2}$ س اور $\frac{1}{2}$ ص - $\frac{1}{2}$ ط جمر = $\frac{1}{2}$ د اور
 $\frac{1}{2}$ ط - $\frac{1}{2}$ ص جمر = $\frac{1}{2}$ ی اور $\frac{1}{2}$ ط + $\frac{1}{2}$ ص = $\frac{1}{2}$ ط ص جمر - $\frac{1}{2}$ نی = $\frac{1}{2}$ ف ان
مساواتوں کے دیکھتے ہم حاصل کریں گے $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ی - $\frac{1}{2}$ س د اور $\frac{1}{2}$ ص = $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ س
اور $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ س ی د - $\frac{1}{2}$ ی د - $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ ف یہاں سے ثابت ہوا کہ اگر اوٹار مرکز
کی اور نصف قطر معلوم ہو تو کس آسانی معلوم ہو سکتا ہے مثال (۱) $\frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ ی د - $\frac{1}{2}$ ی د - $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ ف بیان ظاہر ہے کہ $\frac{1}{2}$ جمر = $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ س
ثابت ہوا کہ اس مساوات میں ایک دائرہ پیدا ہوگا اگر محور د کی درمیان میں
 $\frac{1}{2}$ کا واقع ہو اور اوٹار مرکز کے یہ ہوں $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ د اور $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ س
اور $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ س اگر فرض کریں اس مساوت کی محور کو متقاطع علی القوائم اور
مرکز کو نقطہ شروع تو اس صورت میں مساوت یہ ہوگی $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ س
 $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ مثال (۲) $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ س + $\frac{1}{2}$ د - $\frac{1}{2}$ س = $\frac{1}{2}$ یہ مساوت پیدا ہوگی
جبکہ محور زاویہ $\frac{1}{2}$ کا بناوینے اور مرکز نقطہ شروع اور $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$ د اور واضح ہو
کہ اس بیان مساویہ یا زیادہ $\frac{1}{2}$ سے نہیں ہو سکتا کیونکہ جمر ایک سی کم سی
اگر آتا اور $\frac{1}{2}$ ترجیحی محور فرض کئے جاویں اور کم ایک دائرہ ہو اور قطر
نصف قطر اور $\frac{1}{2}$ ط مماس دائرہ کا نقطہ $\frac{1}{2}$ سی کیا گیا ہے اور کچھ خط $\frac{1}{2}$ ط
اور $\frac{1}{2}$ متوازی محور $\frac{1}{2}$ کے اور کچھ خط $\frac{1}{2}$ ص متوازی محور $\frac{1}{2}$ کے اور
اب کچھ عمود $\frac{1}{2}$ کا خط $\frac{1}{2}$ ص پر اور عمود $\frac{1}{2}$ کا خط $\frac{1}{2}$ ط سے اور فرض کر دو کہ



پر ہی اور زاویہ ف س م (= ر) پیا لیش کیا

جاتا ہی محور لاسے فرض کرو

س م = لا
م ف = ر

اوتار متقاطع علی القوایم نقطہ کے مین

فرض کرو کہ س ف = ع اور س و = س
اور س ن = ط
ن و = ص

ایضا و کی مین

اور زاویہ و س لا = ر تو اس صورت مین

موافق (۶۱) کے یا بسیدہ شکل کے = ع جس و اور لا = ع حم ر اور ط =
س حم ر اور ص = س جس ر لکھو ان قیمتوں کو مساوات کو + لا - ۲ ص - ۲ ط
+ ط + ص - ن = ۰ تو حاصل ہو گا یہ ع (جس ر) + ع (حم ر) +
- ۲ س ع جس ر جس ر - ۲ س ع حم ر حم ر + س (حم ر) + س (جس ر) +
- ن = ۰ یا ع - ۲ س ع (جس ر جس ر + حم ر حم ر) + س - ن = ۰
یا ع - ۲ س ع حم (ر - ر) + س - ن = ۰

(۶۲) اگر ط اور ص کی قیمت اجزائی قطبے س اور ر مین نہ لکھی جاوے تو مساوات
قطبے اس صورت کی ہو جاوے گی ع - ۲ (جس ر + ط حم ر) ع + ط + ص -
ن = ۰ اگر نقطہ شروع محیط دایرہ پر فرض کیا جاوے تو مساوات دایرہ کی یہ ہو
ط + ص = ن سیواسطے مساوات قطبے اس صورت مین یہ ہو جاوے گی

ع = ۲ (ص جس ر + ط حم ر) اگر محور نا کا مرکز پر کسی گدزی تو ص = ۰ اور
مساوات قطبے کی صورت یہ ہوگی ع - ۲ ط ع حم ر + ط - ن = ۰ یہاں سے

(ب۲-۱۴س) لا + ۲ (ب۱-۱۲س) لا + ۲ (د۱-۱۲س) لا + ۲ (۱۴-۱۲س) ف (ط)

واضح ہو کہ اس صورت میں واسطے لا کی ایسی بڑی قیمت فرض کیجا سکتے ہیں کہ علامت ساری مقدار کی موقوف ہو جاوے اول جزو کی مثال یعنی (ب۲-۱۴س) کی علامت پر اس واسطے کہ لا ہمیشہ مثبت رہے گا لا کی واسطے کسی ہی قیمت فرض کیجاوے دلیل اس بات کی کہ لا کی واسطے ایسی قیمت فرض کر سکتے ہیں کہ علامت ساری مقدار کی موقوف ہو جاوے علامت (ب۲-۱۴س) پر واسطے اس بات کی لکھو صورت (ط) کو اسطور پر م (لا ۲) م (لا + ۲) اور فرض کرو کہ م اور م میں جو مقدار بڑی ہے بغیر لی علامت کی = ق اور یہ بھی فرض کرو کہ ر = ± (ق + ۱) لا اور لکھو اس قیمت لا کو اس صورت میں برابر حاصل ہوگی یہ صورت م (ق ۲ + ۱ + ۱ ± م ± م ± م ± م ± م ± م) اب ظاہر ہے کہ قیمت اس صورت اخیر کی مثبت دھیکگی م اور م کی واسطے کچھ ہی فرض کریں اور یہی بات ثابت ہو سکتی ہے جبکہ لا کی واسطے قیمت (ق + ۱) سی زیادہ فرض کیجاوے پس معلوم ہوگا کہ علامت ساری صورت کی موقوف ہو علامت م پر

جبکہ (ب۲-۱۴س) ایک مقدار منفی ہووے تو اس وقت ایسی ممکن قیمتیں لا کی واسطے فرض کیجا سکتی ہیں کہ وہ مثبت ہوں یا منفی لیکن زیادہ ہوں ± ر سی اور اس میں ظاہر ہے کہ تو یعنی وتر غیر ممکن ہو جاوے گا اس سے یہ معلوم ہوگا کہ خط محدود ہوگا دونوں سمت میں یعنی مثبت اور منفی سمتوں لا کی میں جسکہ (ب۲-۱۴س) مثبت ہو تو اس صورت میں اگر فرض کریں ہم واسطے لا کی ایسی قیمتیں جو ± ر سی کم نہ ہوں تو ظاہر ہے کہ قیمتیں وتر ممکن اور یہاں سے معلوم ہوگا کہ خط منفی کا دونوں سمتوں لا کی میں

بی حد ہی اور جبکہ (ب-۱۴-۱۳) = ۰ تو مقدار جو بی علامت جذر کی واقع ہوگی وہ
 ہر ریگی ۲ (ب-۱۲-۱۱) لا + د-۲-۱۴ ف اب اگر (ب-۱۲-۱۱) مثبت ہوگا
 تو ظاہر ہی کہ ممکن اور مثبت قیمتیں لاکھ واسطے ایسی فرض کیجا سکتی ہیں کہ قیمت کے کل ممکن
 ہی لیکن اگر لاکھ واسطے کوئی قیمت منفی زیادہ $\frac{۱۴-۲}{۱۲-۱۱}$ ف سی فرض کیجا دے
 تو آخر ممکن ہو جاویگا اور یہاں سی معلوم ہوگا کہ خط منحنی طول لاکھ انتہا سمت مثبت لاکھ
 رکھیگا اور محدود ہوگا سمت مخالف میں لیکن اگر (ب-۱۲-۱۱) منفی ہوگا تو نتائج
 سکوس حاصل ہوگی یعنی طول خط منحنی کا لاکھ انتہا ہوگا سمت لاکھ میں اور محدود ہوگا
 سمت مخالف میں - اب اگر مساوت (۲) سی بحث کریں تو نتائج مثل بر قوسہ بالا
 حاصل ہوگی پس معلوم ہوگا کہ خطوط منحنی جو مساوت عام درجہ دوم سی تعلق رکھتی ہیں
 تین قسم کی ہوتی ہیں - قسم اول جبکہ ب-۱۴-۱۳ = مقدار منفی تو خطوط
 منحنی محدود ہر سمت ہوتی ہیں - قسم دوم جبکہ ب-۱۴-۱۳ = مقدار مثبت
 تو خطوط منحنی غیر محدود ہر سمت ہیں ہوتی ہیں - قسم سوم جبکہ ب-۱۴-۱۳
 = ۰ تو خطوط منحنی محدود ایک سمت میں اور سمت مخالف میں غیر محدود ہوتے ہیں
 (۷۶) بیان اول قسم کا جہاں ب-۱۴-۱۳ = مقدار منفی کے - فرض کرو کہ

$\frac{۲}{۱۲} = ط$ اور $\frac{۲}{۱۲} = ل$ اور $\frac{۱۴-۲}{۱۲-۱۱} = ع$ اور فرض
 کرو کہ لاکھ اور لاکھ قیمتیں مساوت آئندہ کی میں (ب-۱۴-۱۱) لا + د-۲-۱۴
 (ب-۱۲-۱۱) لا + د-۲-۱۴ ف = ۰ اب ظاہر ہی کہ مساوت (۱)

$$یعنی ر = - \frac{ب + لا + د}{۱۲}$$

$$\sqrt{\frac{2-12}{12}} \quad \frac{2+12}{2-12} \quad \frac{2-12}{2+12} \quad \frac{2-12}{2+12} \quad \frac{2-12}{2+12} \quad \frac{2-12}{2+12} \quad \frac{2-12}{2+12} \quad \frac{2-12}{2+12} \quad \frac{2-12}{2+12} \quad \frac{2-12}{2+12}$$

$$س = ط + ل + \sqrt{ع - (لا - لا) (لا - لا)} \dots (1) \text{ فرض کرو کہ } آ$$

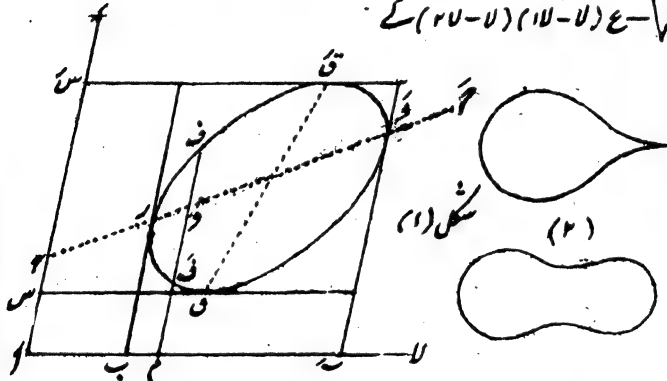
ہی نقطہ شروع اوتار کا اور آ اور آ، ترچہ ہی محور میں اور یہ ہی فرض کرو کہ آ

خط ہی جس کے مساوی $س = ط + ل$ ہی اور $م$ د اوس کا ایک دتر ہی جس کی قیمت مطابق

اوس دتر العرض لآ کی ہی جو واقع ہی مابین لآ اور لآ کی فرض کرو کہ آ

اور دت اور $م$ د کی ایسے خط ہیں کہ ہر واحد ان میں کا مساوی ہی

$$\sqrt{ع - (لا - لا) (لا - لا)} \text{ کے}$$



پس اب ظاہر ہی کہ آ اور آ دت نقطہ خط منحنی پر ہیں - اس واسطے کہ $م$ د =

$$م د + د = ط + ل + \sqrt{ع - (لا - لا) (لا - لا)} \text{ اور } م د =$$

$ط + ل + \sqrt{ع - (لا - لا) (لا - لا)}$ اگر ہم اس طرح کیچیں خطوط مطابق

بہت قیمتوں لآ کے جسکی وسیعہ مقدار نزولی ممکن رہی تو ہم دریافت کریں گی

مختلف نقاط خط منحنی کے - ممکن ہونا کہ اسوقوف ہی اوپر ممکن ہوئے مقدار

نزولی کی اور اسکا ہونا اسوقوف ہی اوپر صورت اجزای ضربی (لا - لا) اور (لا - لا)

یعنی او پر قیمتوں لا، اور لا کے انجی ظاہری کی یہ قیمتیں لا، اور لا، تین طرح
 پر سادات میں آسکتی ہیں۔ اول صورت یہ ہے کہ ممکن اور غیر ممکن ہوں۔ دوسرے
 یہ کہ ممکن اور سادی ہوں۔ تیسری یہ کہ غیر ممکن ہوں۔ صورت اول فرض کرو
 کہ لا، اور لا، ممکن اور غیر سادی ہیں اور کا ثواب = لا، اور ا = لا
 پس اگر اس صورت میں لا = لا، یا لا = لا، تو مقدار = ع (لا - لا)
 (لا - لا) صفر ہو جائیگی اور در خط منحنی کا منطبق اور مساوی در قطر ہو جائیگا
 اس واسطے جبکہ کہ چین ہم خط بار اور بار ایسی کہ وہی گزرتے ہوئی نقاط
 ر اور ر میں متوازی ہوں تو کی تو معلوم ہو جائیگا خط منحنی قطر کو مقام ر
 اور ر پر کاٹتا ہے اگر فرض کریں قسم واسطے لا کی ایسی قیمتیں کہ واقع ہوں مابین
 لا، اور لا کے تو حاصل ہوگی دو قیمتیں ممکن کی اس واسطے کہ (لا - لا) مثبت ہو
 اور (لا - لا) منفی اور یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ ع (لا - لا) (لا - لا) مثبت
 رہیگا۔ اگر لا کو ایسا فرض کریں ہم کہ وہ زیادہ ہو لا، سے یا کم لا، سے تو ظاہر ہے
 کہ ع (لا - لا) (لا - لا) منفی رہیگا اور مقدار نزدیک غیر ممکن ہو جائیگی اور
 کی کوئی قیمت ممکن دریافت ہونگی یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی در میان خطوں
 بار اور بار کی محدود ہے۔ بطرح ہمیں سادات (۱) کا حال بیان کیا
 اور سبط سادات (۲) پر یہی عمل کریں تو دریافت کریں گے ہم کہ خط مستقیم و
 ایک قطری اور خط منحنی اسی نقاط و پر کاٹتا ہے اور جو قیمت چین گے ہم خط
 متوازی لا کے ایسی کہ وہ گزرتی ہوں نقاط و اور و پر تو دریافت ہوگا کہ خط

(۱-۱۱) اور یہ مقدار غیر ممکن ہے مگر اس صورت میں جب کہ $\lambda = 0$ ہے
 پس معلوم ہوا کہ اس صورت خاص میں بچا خط منحنی کے ایک نقطہ پر جسکی وتر

لَا، اور طَلَا + ص یا ۱۲ ی - سد اور ۲ س د - سی ہیں

صورت تیسری فرض کرو کہ لآ اور لآۃ غیر ممکن ہیں اس صورت میں ہم کہتی

ہیں کہ کوئی ایسی قیمت نہ آئی جو اسے فرض نہیں کیا جاسکے کہ (۱-۱۱) (۱-۱۲)

مقدار منفی ہووے کیونکہ قیمتیں غیر ممکن اس صورت کی موتی میں $\pm p + q = -1$

$$= 6 + 7 + 47 + 11 = (11 - 4)(11 - 4) \div 1 - 11 - 7 + 11$$

(7±6) + ق² اور یہ مقدار مثبت ہی جو کہ ممکن قیمت آگے واسطے فرض

کچھ ایسے معلوم ہوا کہ اس صورت میں مقدار زر و لی غیر ممکن رہی اس لیے اس

شرط کی موافق خط منجم نہیں ہو سکتا۔ ہمیں اس مساوت کا حال حسین لاگتی قیمت

نست ترک دریافت کر گئی، نہنن لکھا کہ نکر اس مرادات کی نتاچ موقوف ہین

(۱) مساوات سر پر حق و سبقت معطل ہو کر زمین کو مساواتوں (۱) اور (۲) کو توڑ دے

کہہ گئے کہ اس بات میں اس کی تمام روایتیں جھانک کر (۲۶)

میں نے اس واقعہ پر اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مفاد میں نزول ایک ہی دفعہ ہوتا ہے۔

اور ان میں سے ایک کو بھی لکھ دیا کہ وہ اپنے دوستوں کے ساتھ مل کر میری خدمت میں آجائے۔

کے ساتھ ساتھ ان کے لئے ایک اور واقعہ بھی پیش آیا۔ ۱۹۷۱ء میں پاکستان نے

$\text{لا} = \text{ط} + \text{ص}$ یا $\text{ع} - (\text{ک} - \text{س})$ یا $\text{س} - (\text{ک} - \text{ط})$ پس اب تین صورتیں ہیں
 صورت اول لا اور لام ممکن اور غیر مساوی ہوں اس صورت میں خط منحنی بنیو
 ہی اور اسکی حدود قیمتوں لا اور لام اور کو اور کو سی دریافت ہوتی ہیں اور ہر
 مساواتوں $\text{ک} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{لا} = \text{ط} + \text{ص}$ کے اسکی قطر کبھی جاسکتی
 ہیں اور اسکی نقاط تقاطع محوروں سے دریافت ہو سکتے ہیں - جوقت کہ فرض
 کریں ہم لا اور کو کو علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کی مساوت مفروض میں صورت دوم
 فرض کر دے کہ لا اور لام ممکن اور مساوی ہیں پس اس صورت میں خط منحنی ایک
 نقطہ ہوگا صورت سوم فرض کر دے کہ لا اور لام غیر ممکن ہیں پس اس صورت میں
 خط منحنی غیر ممکن ہوگا - مثال (۱) $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{لا} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$
 $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ یہ صورت متعلق شکل اول اور صورت اول کی ہر اور اسکی حل کرنی معلوم
 ہوگا کہ $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$
 $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ مثال (۲) $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{لا} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$
 یہ صورت اول سے متعلق ہر اس میں جوقت کہ $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$
 اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$ اور $\text{ا} = \text{ب} = \text{ج}$
 اور محور دیکھو فاصلوں ۱۵ اور ۲۰ پر تقریباً یہ چار نقطہ کفایت کرتے ہیں
 خط منحنی کی شکل دریافت کر لیں - مثال (۳) $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{لا} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$
 $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ یہ صورت اول سے متعلق ہے - مثال (۴) $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{لا} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$
 $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{لا} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{ک} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$ اور $\text{لا} - \text{س} = \text{ط} + \text{ص}$

یہ صورت اول سی متعلق ہے۔ مثال (۶) $20 - 2u + 2u^2 + 2u^3 = 0$

صورت دوم سی متعلق ہے (۷) $2 - 2u + 2u^2 = 0$

صورت سوم سی متعلق ہے۔ ان مثالوں کے

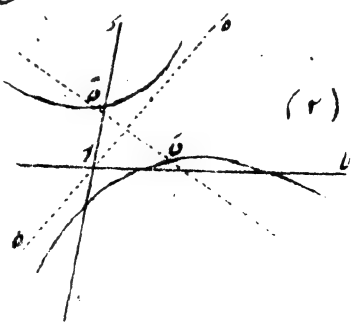
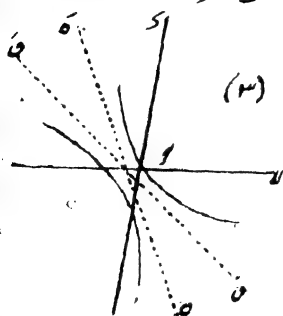
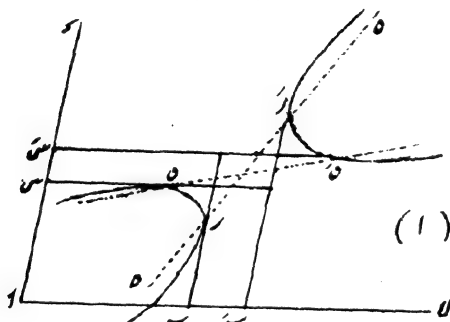
حل کرنیسی دریافت ہوگا کہ بخوبی صورت خط منحنی کی دریافت ان کی نقطہ پر معلوم

ہو جاوے گا کہ خط منحنی کس مقام پر واقع ہے۔

بیان دوسری قسم کی خط منحنی کا حسین ہے۔ اس میں مثبت ہوتا ہے

اس صورت میں ظاہر ہے کہ $-c$ ہو جاوے گا اور $+c$ مساوات (۶) اس

شکل کی ہو جاوے گی $2 = u^2 + v^2 \pm \sqrt{c} (u - 2u^2) (u - 2u^3)$



فرض کرو کہ شکل (۱) میں ۵۵ قطر ہی جسکی مساوات یہہی $5 = ط لاء ص$
 پس اس صورت میں موافق گذشتہ کی تین صورتیں قیمنوں لاء اور لاء کی ہونگی -
 صورت اول میں فرض کرو کہ لاء اور لاء ممکن اور غیر ممکن ہیں اور یہہی فرض کرو
 کہ $لا = ۱$ ب اور $لا = ۱$ ب کہچو ب ر اور ر متوازی ۱ کے اظہار
 ہی کہ خط منحنی قطر سے نقطوں ر اور ر سی ملے ہی - ظاہر ہی کہ مقدار نزولی اپنے
 جو علامت جذ کے نیچے واقع ہی غیر ممکن ہو جاوگی اور صورت میں جبکہ لاء کو بائیں لاء
 اور لاء کے فرض کریں اور ممکن ہو جاوگی اور صورتیں جبکہ لاء کی قیمتیں ان حدود سے
 باہر ہوں اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ کوئی جزو خط منحنی کا بائیں خطوط متوازی ر
 اور ر کی واقع نہیں ہی بلکہ وہ خط منحنی غیر نہایت اور اور ر کی پھیلا ہوا ہی اب
 اگر حل کریں مساوات کو واسطی دریافت کرنا قیمت لاء کے نسبت ۱ کی تو قطری ۱ کا
 کہہ سکتے ہیں اور معلوم کر سکتے ہیں خطوں $س$ اور $س$ کو جو متوازی آلا
 کی ہیں اور جسکی درمیان میں کوئی جزو خط منحنی کا واقع نہیں ہی اور محور لاء ہی انکی
 اور اور ہر ممکن رہتا ہی اس سیاق سے معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی جو متعلق ہے مساوات
 کی ہی ایسا ہی کہ اسکی شکل کچھ طابق شکل (۱) کی ہی اور اسکی دو قوسیں
 جو غیر متحدہ ہیں اس خط منحنی کو بعید البیضوی کہتی ہیں یہاں یہ بیان کرنا چاہیے کہ
 قطر دو نہر یعنی $س$ ضرور نہیں کہ خط منحنی سے ملا ہی کری اس واسطی کہ ممکن ہو
 غیر ممکن ہونا مقدار نزولی کا ایک ہی وقت میں موقوف ہی اور بنیاد متون آلا
 اس کے اور یہ علامتیں بعید البیضوی میں مختلف ہو سکتے ہیں یعنی ممکن کہ ایک مقدار

نزدلی کی قیمت ممکن ہو اور دوسری کی غیر ممکن - صورت دوسری
 فرض کرو کہ لا، اور لا، ممکن اور مساوی ہین پس حاصل ہوگی بہرہ مساوت
 $\text{ط} + \text{ص} = \text{لا} - \text{لا}$ (لا - لا) ملائے اور بہرہ مساوت و خطوط مستقیم سے
 تعلق رکھتی ہے - صورت تیسری فرض کرو کہ لا، اور
 لا، غیر ممکن ہین اس صورت میں ظاہری کہ کتنی ہی ممکن قیمتیں لا کی واسطے فرض
 کیجا دیں سب صورتوں میں مقدار نزدلی ممکن ہیکے یہاں سی بہ معلوم ہوا کہ خط
 منحنی کی چارٹ جن غیر محدود ہونگے - چونکہ $\text{ع} (لا - لا) (لا - لا)$
 کبھی زایل ہین ہو سکتا اس واسطے کہ بیضوی کی بیان میں ثابت ہوئی پس
 قطرہ خط منحنی سے کبھی نہیں مل سکتا لیکن دوسرے قطروں کو کھینچ سکتے
 ہین اور اگر دونوں قطر خط منحنی سے نہ ملین تو بھی اتنا دریافت ہو سکتا ہے کہ
 خط منحنی کون سی جگہ ہین پایا جاتا اور اس صورت میں دریافت کرنا جائے
 کہ خط منحنی کس کس جگہ محوروں سے تقاطع کرتا ہے - اگر ان ترکیبوں کے نقاط
 خط منحنی کے اس قدر دریافت ہو سکیں کہ جنسی مقام خط منحنی کا معلوم ہو جاوے
 تو اون ترکیبوں کا استعمال کرنا چاہی جتنا اگلی بیان ہوتا ہے - جب کہ خاص
 مثال کو حل کیا جاتا ہین تو مساوات عام کو اس صورت سے لکھنا چاہی $\text{ط} = \text{لا}$

$$\text{ع} (لا - لا) (لا - لا) \text{ط} + \text{ص} = \text{لا} \quad \text{ع} (کو - کو) (کو - کو)$$

اب اسکی ہی تین صورتیں ہین صورت اول فرض کرو کہ لا، اور لا،
 ممکن اور غیر مساوی ہین اس صورت میں خط منحنی جدید البیضوی ہی اور اسکی جزو

مقداروں لآ اور لآ، اور کآ اور کآ کے وسیلہ سے دریافت ہو سکتی ہیں اور
دونوں قطر اوسکے مساواتوں $ط + لا = ص$ اور $ط + ک = ص$ سے
دریافت ہو سکتے ہیں اور اوسکے نقاط تقاطع محوروں سے بھی دریافت ہو سکتی ہیں
جبکہ فرض کریں ہم لآ اور کآ کو علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کے۔

صورت دوسری لآ اور لآ ممکن اور مساوی ہیں اس صورت میں خط منحنی
دو خط مستقیم ہو گئی جو آپس میں متقاطع ہونگے۔ صورت تیسری

لآ اور لآ غیر ممکن ہیں اس صورت میں خط منحنی بعید البیضوی ہے کیونچہ دونوں قطر
اند اگر کوئی نقطہ ایسا ہو کہ جہاں خط منحنی محوروں یا کسی قطری تقاطع کرتا ہوگا
بھی دریافت کرو۔ مثال (۱) $ط - ص = لا + ک = ۰$ صورت اول

شکل (۱) سے متعلق ہر اس میں نقطہ شروع وہاں ہر جہاں دونوں شاخیں بعید
کی آپس میں تقاطع کرتی ہیں مساویوں $ط - ص = لا + ک = ۰$ سے
اور یہاں ہر کسی کا $ط = ص$ اور $ب = ۰$ اور $۰ = ط - ص = لا + ک$ اور اس

مثال (۲) $ط - ص = لا + ک = ۰$ صورت اول
متعلق ہر اس میں دونوں قطر نقطہ شروع پر کسی گزرتی اور محوروں سے ہم کار او
بناتی ہیں اور دوسرا قطری ق خط منحنی سے کہیں ملتا اور $ب = ۱$ اور $۱ = ط - ص = لا + ک$

اور خط منحنی سے محور وتر العرض ان فاصلوں پر ۱ تقاطع کرتا ہے مثال (۳)
 $ط - ص = لا + ک = ۰$ صورت اول سے متعلق ہر مثال
(۴) $ط - ص = لا + ک = ۰$ صورت اول سے متعلق ہر مثال

(5) $1 - u_2 + u_4 + u_4 - u_2 = 1$ صورت دوسری انس مساوات

میں جو مساوات خطوں مستقیم کے یہ نکل سکتے ہیں $1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$ اور

$$\cdot = 1 + U_P + S_P + {}^r U_P + S U_P + {}^r S \quad (4) \quad \cdot = 1 - U_P - S$$

(۴) و ۲-۳ لای - لای ۱-۲ - صورت تقیید شکل (۲)

(A) $r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6 + r^7 + r^8 + r^9 + r^{10} + r^{11} + r^{12} + r^{13} + r^{14} + r^{15} + r^{16} + r^{17} + r^{18} + r^{19} + r^{20} + r^{21} + r^{22} + r^{23} + r^{24} + r^{25} + r^{26} + r^{27} + r^{28} + r^{29} + r^{30} = 0$ صورت تیسری شکل (۳) اس صورت

مین ہی ایک قطر خط منحنی سے بنیں مگر لیکن خط منحنی نقطہ شروع میں سے گزرتا ہے اور محور ل کو فاصلہ ۳ پر تقاطع کرتا ہے اور محور د سی سی اسی فاصلہ پر تقاطع

کرتائی - (9) $s^2 - 5s + 2 = 0$ صورت تیری اس

شمال میں قطر ستوازی محور و کئی ہین اور خط سمتی اور قطر سے کسی زمین متاثر کی

مساحت یہ ہے $\frac{9}{4}$ (۱۰) $r_1 - r_2 = r = 0$ صورت تیسری

(۷۱) یہاں سے تیسری قسم کے خطوط منحنی کا بیان حسینؑ ج ۱ ص ۱۴۰۔

اس صورت میں عام مساوات سی پیر حاصل ہوتا ہے کہ $\frac{u + v}{2} =$

$$\dots\dots\dots \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

فرض کرو کہ $\frac{c}{d} = \frac{d}{\frac{d}{x}}$ اور $\frac{d}{\frac{d}{x}} = \frac{x}{c-d}$ اور $c = \frac{d^2 - d}{x}$

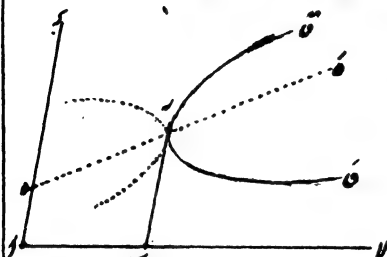
۰ = ۱۲ - ۲ + ۱۲ (ب) ۲ (۱۲ - ۱) + ۱۲ - ۲ + ۱۲ = ۰

و حقیقت کمین بہ قسمتین مساوت (۱) میں تو حاصل ہوتا ہے یہ مساوت

و خط متعلق مساوت $s = طلا$ و $(لا - لا)$

اوص سے قطعہ ہے فرض کر دو کہ ع ثابت ہی پس اگر $\lambda = 1$ ، تو طے ہے

کہ اب مقدار نزولی صفر ہو جاتی ہے لہذا اگر $\Delta = 1$ ب اور پ ر متوازی
 آئے کہ کیسا جاوے تو خط منحنی قطر کو مقام د پر تقاطع کر لیا اب جو ق ت آزیاد



ہو دی لا اسی ∞ تک

اوسوقت آ رہی زیادہ ہوتا

∞ تک اور بیانیسی یہ معلوم

کہ خط منحنی کی دو قوسیں رہا

اور دے غیر محدود ہیں اور اگر لا کم ہو بہ نسبت لا کے تو دے غیر ممکن ہو جاتا

یعنی کوئی جزو خط منحنی کا نفی سمت میں نہیں جاتا۔ اگر فرض کریں ہم کہ

ع نفی ہے تو اس صورت میں ساری نتائج خلاف مذکورہ بالا کے حاصل ہو سکتے

اور خط منحنی فقط سمت نفی لا کے میں پہلی کا اس صورت کا نقشہ خط نقطہ دار

سی معلوم ہو جاتا ہے۔ اس خط منحنی کو قریب البیضوی کہتی ہیں۔ اگر ب د

$-12 = 0$ تو $r = \Delta + \text{ص} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2 - 1}{12}}$ اس مساوات سی

دو خط مستقیم متوازی محور کے متعلق ہیں۔ اب اگر مقدار نزولی صفر ہو جاوے

تو فقط ایک ہی خط مستقیم رہ جاوے گا اور اگر $\Delta = 1$ ف مقدار منحنی ہو

تو قیمت دے کی غیر ممکن ہو جاوے گی اور کوئی خط منحنی نہیں ہو سکتا۔ جب کسی

خاص مثال کو حل کریں تو عام مساوات کو اس صورت کی طرف تبدیل کریں

$r = \Delta + \text{ص} \pm \sqrt{\Delta(\Delta - 1)}$ صورت اول ع مثبت ہو یا منحنی اس

صورت کے خط منحنی قریب البیضوی کہتی ہیں کیونکہ قطر بعد درخت گرد وہ نقطہ

جہاں خط انحنی محو رہا اور قطر کو تقاطع کرتا ہو۔ صورت دوسری

ع = ۰۔ اس صورت میں یا تو دو خط متوازی ہوتے ہیں یا ایک خط مستقیم ہوتا ہے

یا کچر بھی نہیں ہوتا۔ مثال (۱) $۵۲ - ۲ - ۲۵ + ۵۲ - ۱ = ۰$

صورت اول سے متعلق ہے۔ (۲) $۵۲ - ۲ - ۲۵ + ۵۲ - ۱ = ۰$

ایضاً (۳) $۵۲ + ۲ + ۲۵ + ۵۲ + ۱ = ۰$

ایضاً (۴) $۵۲ - ۲ + ۵۲ - ۱ = ۰$ صورت

دویم میں سی دو خط متوازیوں سے متعلق ہے۔ (۵) $۵۲ + ۲ + ۵۲ - ۱ = ۰$

ایضاً ایک خط مستقیم ہے (۶) $۵۲ + ۲ + ۵۲ + ۱ = ۰$

..... ایضاً غیر ممکن خط

(۷۹) پہلے تمام کرنی اس باب کی سی ہیں مناسب معلوم ہوتا ہے کہ ساری باتیں

جبکہ اس باب میں ذکر ہوا ہے اکٹھی لکھی جاوےں $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰$

۱۰۰ + ۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰ + ۱۱۱ + ۱۱۲ + ۱۱۳ + ۱۱۴ + ۱۱۵ + ۱۱۶ + ۱۱۷ + ۱۱۸ + ۱۱۹ + ۱۲۰ + ۱۲۱ + ۱۲۲ + ۱۲۳ + ۱۲۴ + ۱۲۵ + ۱۲۶ + ۱۲۷ + ۱۲۸ + ۱۲۹ + ۱۳۰ + ۱۳۱ + ۱۳۲ + ۱۳۳ + ۱۳۴ + ۱۳۵ + ۱۳۶ + ۱۳۷ + ۱۳۸ + ۱۳۹ + ۱۴۰ + ۱۴۱ + ۱۴۲ + ۱۴۳ + ۱۴۴ + ۱۴۵ + ۱۴۶ + ۱۴۷ + ۱۴۸ + ۱۴۹ + ۱۵۰ + ۱۵۱ + ۱۵۲ + ۱۵۳ + ۱۵۴ + ۱۵۵ + ۱۵۶ + ۱۵۷ + ۱۵۸ + ۱۵۹ + ۱۶۰ + ۱۶۱ + ۱۶۲ + ۱۶۳ + ۱۶۴ + ۱۶۵ + ۱۶۶ + ۱۶۷ + ۱۶۸ + ۱۶۹ + ۱۷۰ + ۱۷۱ + ۱۷۲ + ۱۷۳ + ۱۷۴ + ۱۷۵ + ۱۷۶ + ۱۷۷ + ۱۷۸ + ۱۷۹ + ۱۸۰ + ۱۸۱ + ۱۸۲ + ۱۸۳ + ۱۸۴ + ۱۸۵ + ۱۸۶ + ۱۸۷ + ۱۸۸ + ۱۸۹ + ۱۹۰ + ۱۹۱ + ۱۹۲ + ۱۹۳ + ۱۹۴ + ۱۹۵ + ۱۹۶ + ۱۹۷ + ۱۹۸ + ۱۹۹ + ۲۰۰

بیضوی ہوگا اور اس کی یہ تین قسمیں ہوں گی (۱) $۱ = ۱$ اور $\frac{۱}{۲}$

جیب التمام اس زاویہ کی جو درمیان محو رہنے کی واقع ہے یہ دائرہ ہی چنانچہ نقطہ

(۷۷) میں بیان کیا گیا ہے (۲) قسم (۳۰ - ۱۴) $۱ = ۲$ اور (۳۱ - ۱۴)

(۳ - ۱۴) اس سے ایک نقطہ متعلق ہے (۳) اگر $۱ = ۲$ اس میں

تو خط متعلق اس مساوات کا بعید البیضوی ہوگا اور اس میں یہ ایک قسم ہی ہوگی (۱)

(ب - د - ۱۲) $۱ = ۲$ اور (۳۱ - ۱۴) (د - ۱۴) اور اس سے دو خط مستقیم

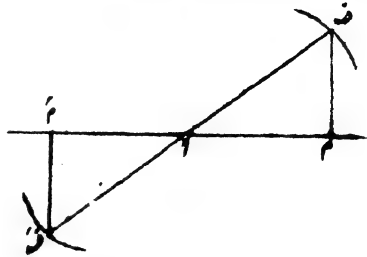
اور م ف ہوتی ہیں پس مثلث قائم الزاویہ ۱ م ف اور ۱ م ف آپس میں برابر

ہوتی ہیں اس واسطے کہ پر دوزاویہ مقابل

کی آپس میں برابر ہوتی ہیں اس لیے خط

م ف خط مستقیم ہی اور آ پر نصف

ہوتا ہی۔ پس ثابت ہوا کہ اگر س



بجای لا اور رک کی۔ لا اور۔ کہ لکھی جاوے اور مساوات کی شکل نہ بدلی تو بالضرور

اس خط منحنی کی واسطے جو لوں مساوات سے متعلق ہی مرکز ہوتا ہی۔ اور اگر مساوات

میں ہر جزو کی مقدار غیر مقررہ کا نشان قوت حاصل جمع ایک عدد جفت ہو تو بھی

شہد بالضرور پوری ہوتی ہے مثلاً مساوات عام درجہ دوم میں ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶

+ ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۷۸۔ میں حاصل جمع نشان قوت مقدار غیر مقررہ کا

اولیٰ تین جزو میں ۱۲ ہی اور دوسرے الگ کے دو جزو میں ۱۲ ہی پس اگر اس صورت میں

تبدیل کریں ہم علامتوں لا اور رک کو مساوات کی یہی شکل نہیں رہتی یعنی اگر کوئی نقطہ

مثلث کی ایک جایی خط منحنی پر واقع ہو تو دوسرے نقطہ مثلث کی دوسری جایی خط

منحنی پر اس طرح نہیں ہو سکتا کہ مقام اس کا نقطہ شروع سے پہلے نقطہ کی مشابہ اور مقابل

ہو اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہی کہ نقطہ شروع۔ کہ خط منحنی کا نہیں لیکن مساوات (۱۲)

کی صورت تین بدلتی خواہ مقدار غیر مقررہ مثبت ہوں خواہ منفی پس واسطے او

خط منحنی کی واسطے نقطہ شروع مرکز ہی۔ اگر مساوات طاق مرتبہ کی ہو اور ہر جزو میں

حاصل جمع نشان قوت قوی مقدار غیر مقررہ کا طاق ہو اور مقدار مقررہ ماکمل یا میل

ہو جاوے خط منحنی مرکزی ہو گا کہ وسطے کے اگر کمین دو نون شرطوں میں کوئی شرط پوری
 نہ ہو تو جو وقت تبدیل کریں ہم عدد ستون + لا اور + کو کو توفی ہر ہی کہ مساوات کی شکل
 بدل جاوے گی۔ پس ہر خط منحنی کا لفظ شروع مرکز ہو سکتا ہی اگر او سکی مساوات کی
 ایسی تحویل کریں کہ او سکی شکل مطابق ایک کی دو صورتوں ذیل کی ہو جاوے۔

(۱) جب کہ مجموعہ نش نون قوای مقدار بر غیر مقررہ کا ہر جزو میں جفت ہو خواہ مقدار
 اوسین بائی جاوی خواہ نہ بائی جاوے مثلاً $1x^2 + 2x + 3 = 0$

(۲) جب کہ مجموعہ نش نون قوای مقدار بر غیر مقررہ کا ہر جزو میں طاق ہو اور مقدار
 مقررہ نہ بائی جاوی مثلاً $1x^2 + 2x + 3 = 0$

فقہ (۵۹) میں بیان کیا ہی کہ کوئی مساوات اس طرح تحویل نہیں کیا سکتی کہ او سکا
 مرتبہ کم ہو جاوے یا زیادہ یا انسی یہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر مساوات اصلی جفت مرتبہ کی
 ہو تو بعد تحویل ایسی ہی رہے گی اور وہ خط منحنی ہو اصلی مساوات سے تعلق نہکتا ہی مرکز
 ہو سکتا ہی اگر او س مساوات کو شرط (۱) کی طرف تحویل کر سکیں لیکن اگر مساوات اصلی

طاق مرتبہ کی ہو بعد تحویل کی ہی طاق مرتبہ کی رہے گی اور اس صورت میں خط منحنی متعلق اوس
 اوس وقت مرکزی ہو سکتا ہی جب کہ او س مساوات کو شرط (۲) کی طرف تحویل کر سکیں
 اور یہ انسی یہ معلوم ہوتا ہی کہ اگر ہم دریافت کیا جائے اس بات کو کہ خط منحنی کسی
 کا مرکزی ہی یا نہیں تو ترکیب مذکورہ ذیل کفایت کرتی ہیں۔

پہلی ترکیب یہ ہی کہ مساوات جفت مرتبہ کی ہو تو اوس میں عدد ن کی تبدیل اس طرح کریں
 کہ وہی اجزا برچین حاصل جمع نش نون قوای مقدار بر غیر مقررہ کا ہی بالکل ذیل ہو جاوے

دوسری ترکیب یہ ہے کہ اگر مساوات طاق مرتبہ کی ہو تو محور دن کو اسطرح تبدیل کرنا
 چاہیے کہ وہ اجزا جنہیں حاصل جمع نشانوں قواسی مقدار فی مرتبہ کا جفت ہو کھل
 زایل ہو جاوے اور مقدار مقررہ بھی جاتی رہے۔ اب تک جو ہمیں تبدیل مساوات کی بیان
 کی ہے اوس میں فرض کیا ہے کہ لا = لا + ط اور د = د + ص اور اس تبدیل
 سے فقط دو جزو مساوات کی زایل ہوتی ہیں اور مساوات درجہ دوم کی موافق شرط
 (۲) کی ہو سکتی ہے مگر اوس صورت میں جب کہ قیمت ط اور ص کی غیر ممکن یا لالہات
 ہو۔ ان خطوط منحنی میں جو متعلق مساوات درجہ دوم کی ہیں ہم دیکھتی ہیں کہ
 قیمتیں ط اور ص کے ممکن اور محدود ہیں الا اوس وقت جب کہ ب = ۲ - ۱۴ س =
 اور بواسطہ معلوم ہوا کہ بعضی اور جید البضوی میں مرکز ہوتا ہے اور قریب البضوی
 میں نہیں ہوتا۔ اوس صورت میں جبکہ ب = ۱۴ س = ۰ اور اس وقت ۱۲ سی
 - ب د یا ۲ س د - بی زایل ہو جاوے تو مساوات مفروض مساوات خط مستقیم
 کی ہو جاوے گی بطرح مساواتوں (۱) اور (۲) کہ فقرہ (۷۵) میں درج ہیں دیکھنی
 سے واضح ہوتا ہے۔ اگر سبب کسی تبدیل کی مقدار ط زایل ہو جاوے تو مساوات مفروض
 اس شکل کی ہو جاوے گی ۱ د + ۲ ب لا + ۳ س لا = ۰ اور اس سے یہ قیمت کی حاصل
 ہوتی ہے ۲ = { ب + ۳ س } - ۱۴ س { ۱۱ } اور یہ انسی معلوم ہوتا ہے کہ
 مساوات خط منحنی مساوات دو خطوں مستقیم سے تبدیل ہو جاوے گی اور یہ دونوں
 خط مستقیم مرکز زمین سے گزرتی ہوئی جاوے گی اگر اس صورت میں ب = ۲ - ۱۴ س
 منفی ہو دی تو یہی اس صورت میں خط منحنی کا ایک نقطہ ہو گا (دیکھو فقرہ (۷۵))

۴ = ۱۲ - ۸ = ۴ اور ۳ = ۶ - ۲ = ۴
 ۲ = ۱۲ - ۸ = ۴ اور ۳ = ۶ - ۲ = ۴

۱۲ اور ۱۲ متوازی پہلی محور کے ہیں اور اس صورت میں مساوت ہے
 ۱۲ + ۲ = ۱۴ + ۲ = ۱۶ = ۰ - شکل تیسرے میں نقطہ شروع تو تھا

آج پر لیکن محور اسکی ۱۲ اور ۱۲ ہیں محور ۱۲ کی مقام کو بقدر زاویہ ۱۲
 کی تبدیل کیا ہے اور زاویہ ۱۲ مساوت مندرجہ ذیل سی معلوم ہوتا ہے

۱۲ = ۱۲ - ۱۲ = ۰ اور اس صورت میں مساوت خط منحنی کی جیسے ہی ۱۲
 ۱۲ + ۲ = ۱۴ = ۰ - ۱۲ ۱۲ ۱۲

(۸۶) بیضوی اور بیضی بیضوی میں محور اس جزو محور مرکزی کو کہتے ہیں جو خط
 منحنی میں گزرا ہوا ہے - واسطی دریافت کرنے طول محور کے فرض کر دیا اور ۱۲

کو علیحدہ علیحدہ مساوی حصہ کے اور اس ترکیب سے وہ نقاط معلوم ہو جائیں گے جہاں خط
 منحنی محور کے ساتھ قطع کرنا ہے یعنی اس ترکیب سے طول نصف محور کا نصف ہو جائے گا

مساوت ۱۲ + ۲ = ۱۴ + ۲ = ۱۶ = ۰ میں فرض کر دیا کہ ۱۲ = ۰
 ۱۲ = ۰ اور ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ = ۰ اور اگر ۱۲ = ۰ تو ۱۲ + ۲ = ۰ = ۰

۱۲ = ۱۲ - ۱۲ = ۰ - شکل تیسرے میں نصف محور ۱۲ اور ۱۲ ہیں
 ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ = ۰ اور ۱۲ = ۱۲ - ۱۲ = ۰ اگر بجای آئے ہوں اور

۱۲ کی قیمتیں ۱۲ اور ۱۲ کی جو مسائل اصل مساوت کی ہیں لکھی جائیں تو
 محذور دونوں نصف محور کے صورت مندرجہ ذیل میں باقی جاوے گی

جو صورت بالا میں مستقل ہوئی ہو مگر بیاعت اس کے بعض عملوں میں طوالت
بہت ہوگی تو لازم ہے کہ ہم توڑی سی عمل لکھ دیں اور بہوئے نتیجہ بیان کریں *
طالعیم کو لازم ہے کہ اس فقرہ کو اور جس پر ایسا ہی نشان ہو اول مطالعہ میں کر
کرے۔ واسطے زایل کرنے اور جس جز کے جسمین حاصل ضرب بقدر اون غیر فقرہ
کا ہر اون صورتوں کا استعمال کرو جو فقرہ (۵۵) میں مندرج ہیں یعنی

ر = لا جس ر + و جس ر اور لا = لا جس ر (گہ - ر) + و جس ر (گہ - ر)
(آب جو وقت کہیں ہم یہ قیمتیں ر اور لا مساوات ۱ - ۱ + ب لا و +
س لا + ف = ۰ میں تو حاصل ہوگی یہ مساوت ۲ - ۱ + جس ر + جس ر
جس ر (گہ - ر) + جس ر (گہ - ر) { حد تک + لا } { حد تک + جس ر
جس ر (گہ - ر) + جس ر (گہ - ر) { حد تک + لا } { حد تک + جس ر + جس ر
جس ر (گہ - ر) + جس ر (گہ - ر) + جس ر (گہ - ر) + جس ر (گہ - ر) + جس ر (گہ - ر)
جس ر (گہ - ر) + ف = ۰ آب فرض کرو کہ امثال لا کے مساوی صفر کی اور اگر
دریافت کریں ہم صورت مفصلہ جس (گہ - ر) اور جس ر (گہ - ر) کی اور تقسیم
کریں انکو جم ر جم ر پر تو حاصل ہوگی یہ مساوات (۱ - ۱ - ب جم ر + س جم ر)
۲ - ۱ - ر جم ر + { ب - ۱ - س جم ر } جس ر + { س ر + س } + ۱ - ۱ - جس ر
= ۰ اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر کوئی خاص قیمت واسطے رکے فرض کیا
تو اسکی موافق ر اور ر کی دریافت ہو سکتی ہے اس سے معلوم ہوا کہ مثلاً
موجودہ معنی کے ہو سکتے ہیں اور اس کے مساوی اس شکل کی ہو سکتی ہیں

۱۰ + س لا + ف = ۰ آب ان محور دن کا ذکر کرتے ہیں اور یہ بات
 دریافت کرنی کہ ان محور دن میں سے کونسی مقاطع علی القوام ہیں اس کے دریافت
 کرنے کو فرض کر دو کہ $r = \frac{r}{p}$: مس = $\frac{r}{p}$ - مس = $\frac{r}{p}$ جو وقت
 مکین ہم یہ قیامت مس کی اوس مساوات میں جعین مس اور مس ر ہی
 جاتی ہیں تو حاصل ہو گا یہ $2 - \{1 - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\} + \frac{r}{p} = 2$
 $2 - \{1 - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\} = 2$: مس = $\frac{r}{p}$
 مس جس کے - $\frac{r}{p}$ جس کے واضح ہو کہ دوزاوی ایسے ہیں کہ اوکلی ماس مس
 ۱ - $\frac{r}{p} + \frac{r}{p}$ ہی اور ان زاویوں میں فرق ۱۸۰ کا ہی یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ شرائط مساوات
 بالاکود دوزاویہ کی پورا کر سکتے ہیں مگر ازلکہ ایک زیادہ سی دوسری بقدر
 ۹۰ کے توقف دوسری قیامت نئی محور کے مین مستقل ہو سکتی ہے یہاں سے معلوم
 ہوا کہ صرف دوی محور مقاطع علی القوام ہو سکتے ہیں اور مقام ادکھا صورت گذشتہ
 سی معلوم ہو جاوے گا - $\frac{r}{p} + \frac{r}{p}$ دریافت کر دو کہ اشالی ہوتا
 مس کو یہ نسبت اصلی مساوات کے اس شرط پر کہ نئی محور مقاطع علی القوام فرض کیے
 جاوے اگر فرض کریں ہم $r = \frac{r}{p}$: مس اور ضرب کریں (جس کے) $\frac{r}{p}$ کو اشالی
 عام مساوات پہلی جہین جو پہلی دریافت کی گئی ہے تو حاصل ہو گا یہ $2 - \{1 - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\} + \frac{r}{p} = 2$
 $1 - \{1 - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\} = 2$: مس (جس کے) $\frac{r}{p}$ اور مس (جس کے) $\frac{r}{p}$
 $1 - \{1 - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\} = 2$: مس (جس کے) $\frac{r}{p}$ اور مس (جس کے) $\frac{r}{p}$
 : (۱ - مس) (جس کے) $\frac{r}{p} = 1 - \{1 - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\} - \{1 - \frac{r}{p} + \frac{r}{p}\} = 2$: مس (جس کے) $\frac{r}{p}$

۲- حاصل کرد
 ۱- $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱)
 اس فقرہ کی اخیر میں چند مثالیں لکھی جاسکتی مگر زنی خطوہ منحنی کے
 بحث کی بعد۔

تفصیل اور صورتوں کی جو ذریعہ متقاطع علی القوم حاصل
 ہوتے ہیں

(۱) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱)

(۲) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۲) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۲)

(۳) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۳) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۳)

(۴) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۴) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۴)

(۵) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۵) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۵)

(۶) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۶) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۶)

(۷) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۷) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۷)

(۸) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۸) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۸)

(۹) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۹) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۹)

(۱۰) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱۰) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱۰)

(۱۱) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱۱) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱۱)

(۱۲) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱۲) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ (۱۲)

سی مقام اودن محورون متقاطع علی القوائیم کا جو مرکز سی گذرتی ہوں دریافت ہوتا ہے
سادات (۷) اور (۸) کی دس یکہ سادات عام (۹) سادات کی طرف تخیل
ہو جاتی ہے اور امثال ۷ اور ۸ کی جو تہ اولیٰ جانبین نو اودن سے علیحدہ علیحدہ مجذور
نصف محورون کے جو محورون ۷ اور ۸ پر شمار کی جانبین تعمیر ہوتی ہیں۔

مثال (۱) $۷ - ۸ + ۷ + ۷ - ۱ = ۰$ اس سادات کا کوکس

بیضوی ہے اور اس میں $۱ = ۱$ اور $۱ = ۱$ اور $۲ = ۲$

$۷ - ۸ + ۷ - ۲ = ۰$ اور چونکہ $۲ = ۲$ $\therefore ۲ = ۲$ $۹ = ۹$

اور $۵ = ۵$ اور بے منفی ہے $\therefore ۱ = ۱$ اور $۳ = ۳$ اور $۳ = ۳$

$\therefore ۳ = ۳$ اور $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۲ = ۰$ یعنی $\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۲ = ۱$ اس کا بیضوی مجذور

نصف محورون کے $\frac{۳}{۲}$ اور ۲ ہیں اور یہاں سی معلوم ہوا کہ نصف محورون $\frac{۳}{۲}$ ہے

اور ۲ ہیں اور \therefore طول محورون کا ۲ اور $\frac{۳}{۲}$ مثال (۲) $۷ - ۸ + ۷ - ۲ = ۰$

$+ ۷ - ۸ + ۷ - ۱ = ۰$ اس کا کوکس بیضوی ہے اور اخیر مرتبہ تک تخیل

کی ہوئی سادات یہ ہے $۷ - ۸ + ۷ - ۱ = ۰$ اس صورت میں محورون ۲ اور $\frac{۳}{۲}$

ہیں۔ مثال (۳) $۷ - ۸ + ۷ - ۲ - ۲ = ۰$

اس صورت میں کوکس بیضوی ہے اور اخیر مرتبہ تک تخیل کی ہوئی سادات یہ ہے

$۷ - ۸ + ۷ - ۲ - ۲ = ۰$ مثال (۴) $۷ - ۸ + ۷ - ۲ - ۲ = ۰$

$۷ - ۸ + ۷ - ۲ - ۲ = ۰$ اس کا کوکس بیضوی ہے اور $۲ = ۲$

اور $۲ = ۲$ اور $۸ = ۸$ اور $۲ = ۲$

$\therefore r = 5m$ اور \therefore وہ صورتیں جنسی تخیل محل میں آتی ہیں یہ ہیں
 $\frac{r}{2} = \frac{5m}{2}$ اور $\frac{r}{2} = \frac{5m}{2}$ $\therefore \frac{r}{2} = \frac{5m}{2}$ $\therefore \frac{r}{2} = \frac{5m}{2}$ $\therefore \frac{r}{2} = \frac{5m}{2}$
 $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 5m$ یعنی $5m = 5m$ مثال (۵) $5m = 5m$
 $5m + 5m = 10m$ اسکا کوکس بیضوی ہے اور اخیر مرتبہ تک تخیل
 کی ہوئی مساوات یہ ہے $5m + 5m = 10m$ مثال (۶) $5m + 5m = 10m$
 $5m - 5m = 0$ اسکا بھی کوکس بیضوی ہے - فرض کرو کہ $5m = 5m$
 $r + p = 5m$ اور $l = 5m$ \therefore اول مرتبہ کی تخیل کی ہوئی مساوات یہ ہے
 $2(r + p) + 2(l + v) + 2(m + r + p) - 2(l + v) = 4$ دینے
 $2r + 2p + 2l + 2v + 2m + 2r + 2p - 2l - 2v = 4$
 $\therefore 4r + 4p + 2m = 4$ اور $v = 1$ $\therefore v = 1$ اور $p = 1$
 اور $f = 4$ اس میں زیادہ تخیل کرنے کی چیز ضرور نہیں محو ہے اور $f = 4$ ہیں
 مثال (۷) $r = 10$ اور $l = 1$ $\therefore 10 + 1 = 11$ اس صورت میں کوکس
 بعید البیضوی ہے اس میں اخیر مرتبہ کی تخیل کی ہوئی مساوات یہ ہے $r = 10$ $l = 1$
 $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 10$ مثال (۸) $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 10$ $\frac{r}{2} + \frac{r}{2} = 10$
 کوکس اسکا بعید البیضوی ہے اور تخیل کے ہوئی مساوات یہ ہے $r = 10$ $l = 1$
 اس صورت میں ہر ایک محور برابر ہے $r = 10$ اور یہ بھی واضح ہو کہ اس صورت میں $r = 10$
 محور جو محور l پر شمار کیا جاوے خط منحنی سے ملے گا مثال (۹) $r = 10$ $l = 1$
 $r = 10$ اسکا کوکس بھی بعید البیضوی ہے اور اس میں نقطہ شروع مرکز ہی ہے اور

اسیسی ایک ہی تخیل کفایت کرتے ہیں طہ ہر ہی کہ مس ۲ = ۱ : ۲ = ۲۵

اودم = ۲۵ اور ۱ = ۲۵ اور ۲ = ۲۵ اور ۳ = ۲۵

(۹۰) اس فقرہ میں محور ترجیحی فرض کئے جاتے ہیں قسٹین طہ اور ص اور ف کی

بعید دیسی ہی رنگی جیسی محور دن تقاطع علی القواہم میں تین مس ۲ =

۱ - بجم کہ بجم کہ ۱ = ۱ (۱ - بجم کہ + س ± م) ۲ = ۲

اودم = ۲۵ + ۲۵ + ۲۵ - ۲۵ = ۲۵ (۱ + س) بجم کہ ۱۲ + س بجم کہ ۲۵

علامت ± کا استعمال کرنا چاہی مولف علامت ± (س جس کہ - جس کہ)

مثال (۱) ۲۵ + ۲۵ + ۲۵ + ۲۵ - ۲۵ = ۰ زاویہ محور دن کا اس صورت

میں ۲۵ ہی اور ص = ۲۵ - ۲۵ = ۲۵ اور مس ۲ = ۱ : ۲ = ۲۵

۲۵ اودم = ۲۵ (۲۵ - ۲۵) اور ۱ = ۲۵ - ۲۵ اور ۲ = ۲۵ + ۲۵

۲ = ۲۵ - ۲۵ تخیل کی ہر اسی مساوات یہ ہی ۲۵ (۲۵ - ۲۵) + ۲۵ (۲۵ - ۲۵) + ۲۵

= ۱ اور کو کس بیٹوی ہی اور مجدد نصف محور دن کے یہ ہیں ۲ (۲۵ - ۲۵)

اور ۲۵ + ۲۵ مثال (۲) ۲۵ + ۲۵ + ۲۵ + ۲۵ - ۲۵ = ۰

۲۵ = ۰ اس صورت میں زاویہ کہ ۲۵ = ۲۵ اور ص = ۲۵ - ۲۵ = ۰

اور ف = ۲۵ + ۲۵ + ۲۵ = ۲۵ اب صورت مساوات کی یہ ہو جاتی

ہی ۲۵ + ۲۵ + ۲۵ - ۲۵ = ۰ چونکہ مس ۲ = ۰ نو مساوات

مذکور مساوات محور دن تقاطع علی القواہم سے تبدیل ہو سکتی ہے اگر تبدیل کریں

محور ۲ کو بعد زاویہ ۲۵ کے اور اسیلے جبکہ فرض کریں ۲ = ۰ اور کہ ۲۵ = ۰

توضو رتین (۵۶) بوسید تبدیلی کے اس شکل کے بوبائیگی کے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور جب کلین یہ قسمنیں مساوات بالاین تو یہ مساوات حاصل ہو
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ۔ یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ محور بیضوی کے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ میں
 مثال (۳) $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 محور منحنی سے کہی نہیں ملتا۔

(۹۱) فقرہ (۸۱) کی اخیر میں نے بیان کیا ہے کہ عام مساوات درجہ دوم کی متعلق
 دو قسم کے خط منحنی ہوتی ہیں ایک تو مرکزی جنہیں ایک نقطہ ایسا ہوتا ہے کہ جتنی خط
 اوس میں کسی گزیر کر خط منحنی تک منتہی ہوتی ہیں اوکئی تضعیف ہو جاتی ہے اور دوسری
 جنہیں ایسا نقطہ ہوتا ہے کہ یہ بات کہ فلاتی خط مرکزی ہیں اور فلاتی غیر مرکزی ہیں
 قیمتوں ص اور ط کی جو واسطی دور کر کے بعض اجزاء مساوات عامہ کی فرض کی
 گئی تھی معلوم ہوتی ہے جبکہ ص اور ط کی نہایت ہوتی تھی تو اس سے یہ معلوم ہوتا تھا
 کہ خط منحنی ایسی صورت میں مرکزی نہیں ہے یعنی ص و ط مثال اول میں خبروں سے
 عامہ میں یہ نسبت ہوتی تھی $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
 منحنی کا معلوم ہوتا تھا۔ چونکہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

کا ہی تو اس سے بہر معلوم ہوتا ہے کہ عام مساوات درجہ دوم کی جو قریب البیضوی سے
 متعلق ہے ایسی نہیں کہ اوسمین یہی وہی تخیل ہو سکے جو فقرہ (۸۰) میں کام آئی
 تھی یعنی اس میں امثال لا اور کو زایل نہیں کر سکتے اور مساوات عام کو اس طرح
 تخیل نہیں کر سکتے $1x^2 + 2x + 3 = 0$ یعنی اخیر مرتبہ تخیل کا
 یہ نہیں ہو سکتا $1x^2 + 2x + 3 = 0$ گو کہ ہم مساوات قریب البیضوی کو
 بعینہ موافق بالاک تخیل نہیں کر سکتے براد کی تخیل اس طرح ہو سکتی ہے کہ تخیل
 کی ہوئی صورت صورتانہ نہ کر کے نہایت سہل ہو اور یہ اس طرح ہو سکتا ہے کہ
 عمل جو پہلے کی گئی تھی اس میں اس طرح کے جادین مگر ترتیب اوکلی بدل دین - ہم اول
 تبدیل کر کے محورون کو بقدر زادیہ رک کی اور اس ترتیب سے دو جز مساوات عام
 کی زایل ہو جائیں گے اور صورت مساوات کی پیرہ جاگی $1x^2 + 2x + 3 = 0$
 اور اب ہم تبدیل کر لیں گے محور کو اس طرح کہ کسی محور پہلی محور کوئی متوازی ہوں اور اس ترتیب
 سے دو جز زایل ہو جائیں گے پس مساوات اخیر اس صورت کی ہوگی $1x^2 + 2x + 3 = 0$
 (۹۲) صورتون فقرتون (۵۸) میں فرض کرو کہ $1x^2 + 2x + 3 = 0$ جس $1x^2 + 2x + 3 = 0$
 اور $1x^2 + 2x + 3 = 0$ جس $1x^2 + 2x + 3 = 0$ میں اور پھر مرتب کرین اسکی اجزا کو تو
 حاصل ہوگی یہ مساوات $1x^2 + 2x + 3 = 0$ جس $1x^2 + 2x + 3 = 0$ جس $1x^2 + 2x + 3 = 0$ جس

+ ۱۲ جس ر م ر	+ ۱۲ جس ر م ر
+ ۱۲ جس ر م ر	+ ۱۲ جس ر م ر
+ ۱۲ جس ر م ر	+ ۱۲ جس ر م ر
+ ۱۲ جس ر م ر	+ ۱۲ جس ر م ر

$\pm (1+s) = \frac{s}{s+1}$ کیونکہ جس ۲ مثبت ہوتا چاہی اور ب اپنی ذات سے

$$= \sqrt[4]{\frac{s-1}{s+1} + 1} = \sqrt[4]{\frac{s+1}{s+1}} = 1 = \sqrt[4]{\frac{s+1}{s+1}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{s}{s+1}} \text{ اور جس } = \sqrt[4]{\frac{s-1}{s+1}} = \sqrt[4]{\frac{s}{s+1}} \text{ اور جو وقت کہیں یہ}$$

تین جبر اور ہم رک مساوات تبدیل کی ہوئی میں تو حاصل ہوگی یہ

$$\text{مساوات } 1 = \frac{11}{s+1} - \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s+1}{s+1} = 1$$

$$= \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1} \text{ لیکن ب}$$

$$- \frac{s}{s+1} \text{ تو حاصل ہوگی یہ مساوات } = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1}$$

$$+ \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1}$$

$$= \frac{s}{s+1} - \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1} \text{ اور } = \frac{s}{s+1} \text{ اور اس صورت میں}$$

تبدیل کی ہوئی مساوات کی شکل یہ ہو جاتی ہے

$$(s+1) = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1}$$

(۹۴) تاکہ مساوات کی تحویل اور یہی ہو سکی تبدیل کردہ مجرور مفروض کو

اور مجرور سے جو اعلیٰ متوازی ہوں بذریعہ ان صورتوں جبریکہ

$$= \frac{s}{s+1} \text{ اور } = \frac{s}{s+1} \text{ جو فقرہ (۵۴) سے حاصل ہوتی ہیں اور}$$

$$\text{اس تبدیلی سے مساوات } 1 = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1}$$

$$\text{اس صورت کی ہو جاوے گی } 1 = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1}$$

$$+ \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1} \text{ یعنی } 1 = \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} + \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1}$$

$$+ \frac{s}{s+1} = \frac{s}{s+1} \text{ چونکہ اس مساوات میں دو مقداریں غیر منقطع ط اور ص ہیں}$$

اور اس واسطے اختیار ہی کہ دو یا تین ان مقداروں کی فرض کریں پس فرض کرو کہ انکی قیمتیں ایسی ہیں کہ امثال گ اور مقدار مقررہ علیحدہ علیحدہ مساوی صفر کے ہو جاویں یعنی فرض کرو کہ $۲ا + د = ۰$ اور $۱ا + د + ط + ی = ص$

+ ف = ۰ یہاں سے معلوم ہوگا کہ $ط = -\frac{د}{۲}$ اور $ص = \frac{د + ۲ف}{۲}$

پس اب تخیل کی ہوئی مساوات یہ ہوگی $ا + د + ی + لا = ۰$ اور یہ ظاہر

ہی کہ اگر ب مثبت ہوتی تو یہ مساوات حاصل ہوتی سن $۲ا + د + ی + لا + ی = ص$

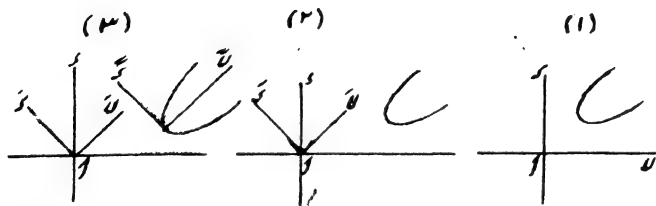
ی + لا + ف = ۰ اور اس سے اخیر مرتبہ کی تخیل کی ہوئی مساوات یہ ہوگی

سن $۲ا + د + ی = ۰$ اور اس کا قیمت پر $ط$ اور $ص$ ان مساواتوں سے معلوم

ہو جاتی ہیں $ص = -\frac{د + ۲ف}{۲}$ اور $ط = \frac{د - ۲ف}{۲}$

(۹۵) شکلوں آئندہ سے تمام تبدیلیاں مقام خط منحنی کے کہ اوکھی مضائقہ

تبدیلیاں جبریہ مساوات میں واقع ہوئی ہیں معلوم ہوتی ہیں



شکل (۱) میں خط منحنی محوروں $ا$ اور $د$ سے متعلق ہے اور اس صورت

میں مساوات یہ ہے $۱ا + ب + لا + د + ی + ف = ص$

شکل (۲) میں اصل محوروں کو $ا$ اور $د$ سے تبدیل کیا ہے اور زاویہ

۱۱۱۔ اس مساوات سے معلوم ہوتا ہے کہ $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ اور موافق
 اس تبدیلی کی مساوات عام اس صورت کی ہو جاتی ہے بشرطیکہ $\frac{1}{1}$ منفی ہو
 $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 0$ ۔ اگر $\frac{1}{1}$ مثبت ہو تو خط منحنی شروع ہوتا
 اس مقام پر واقع ہوگا کہ اس کی نئی محور اصلی محوروں پر عمود ہونے جائے اور
 اس صورت میں مساوات بعد تبدیلی کی یہ ہوتی ہے $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 0$
 $\frac{1}{1} = 0$ ۔ شکل (۳) میں نقطہ شروع $\frac{1}{1}$ سے $\frac{1}{1}$ پر بدل گیا ہے اور
 اوتار کے محوروں $\frac{1}{1}$ اور $\frac{1}{1}$ پر شمار کی جاتے ہیں اور ان کی قیمت مساوی
 آئندہ سے آئندہ معلوم ہوتی ہے اگر $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ اور
 $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ جو وقت $\frac{1}{1}$ مثبت ہو اور وقت $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$
 اور $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$ پس جو وقت $\frac{1}{1}$ منفی ہو اور وقت مساوی
 بعد تحویل کے یہ رہے گی $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 0$ اور جو وقت $\frac{1}{1}$ مثبت ہو اور
 مساوی یہ ہوگی $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 0$ ۔

(۹۶) اگر اصل محور چھٹی ہو تو تبدیلی مساوات عامہ کی بوسیہ صورتوں
 مندرجہ فقرہ (۵۵) کے ہو سکتے ہیں، قیمتیں $\frac{1}{1}$ کے بعینہ ویسی ہی
 حاصل ہو سکتی ہیں فقرہ (۱۷۱) میں حاصل ہوئی ہیں اور اس صورت میں فرض
 کر سکتے ہیں کہ $\frac{1}{1} = 0$ اور قیمت مس $\frac{1}{1}$ کی یہ معلوم کر سکتے ہیں جبکہ محور
 متقاطع علی القوائیم ہوں اور موافق فقرہ (۱۷۱) کی یہ بھی معلوم ہو سکتی ہے
 کہ نقطہ ایک ہی مجموعہ ایسی محوروں کا ہے جو قوت کے جزا، کو زایل کر دے

کرتی ہی وہی قیمت اودن جزون کو ہے تاویل کر لیگی جولا^۱ اور د^۲ سی متعلق

ہین جیسی فقرہ (۹۳) سی واضح ہی اور مساوت تخیل کی ہوئی یہ ہوگی جبکہ

جس گ^۱ - ب جس گ^۲ مثبت ہووے اوسوقت ۱^۱ + د^۲ + ی^۳ لا^۴ + ف = ۰

اور جوقت س جس گ^۱ - ب جس گ^۲ منفی ہو تو یہ مساوت ہوگی س لا^۴ + د^۲

+ ی^۳ لا^۴ + ف = ۰ (۹۴) دریافت کیا جاتے ہیں ہم قیمتیں آسان

د^۲ ی^۳ کے واضح ہو کہ انکی قیمتیں آسانی سے بوسیدہ فقرہ (۸۸) کی معلوم قیمتیں

چونکہ ب^۱ - م^۱ س = ۰ تو جوقت س جس گ^۱ - ب جس گ^۲ مثبت ہو اوسوقت

حاصل ہوگی یہ مساوت م = ۱ - ب جس گ^۱ + س اور ۱ = ۱ - ب جس گ^۱ کہ

ہاں (ب جس گ^۱ اور س = ۰ اور جس گ^۲ = ۱ - ب جس گ^۱ + س جس گ^۲ اور

جس گ^۱ = جس گ^۲ + س اور جس گ^۲ = ۱ - ب جس گ^۱ + س اور د^۲ =

۱ - ب جس گ^۱ + س (د - ی جس گ^۱) = ۱ - ب جس گ^۱ + س جس گ^۲ - ی جس گ^۱ جس گ^۲

جس گ^۱ جس گ^۲ جس گ^۱ - ب جس گ^۱ + س

اور ی = د جس ر + ی جس (گ^۱ - ر) = (د - ی جس گ^۱) (س + ی جس گ^۲)

جس گ^۱ جس گ^۲ جس گ^۱ - ب جس گ^۱ + س

پس تخیل کی ہوئی مساوت یہ ہوگی ۱^۱ + د^۲ + ی^۳ لا^۴ + ف = ۰ اوسوقت

مین جبکہ (س جس گ^۱ - ب جس گ^۲) منفی ہو تو قیمتیں ۱^۱ س م د^۲ ی^۳ کی یہ

ہوگئی م = - (۱ - ب جس گ^۱ + س) اور ۱ = ۰ اور س = (۱ - ب جس گ^۱ + س)

جس گ^۱ فقط جس ر اور جس ر کے قیمتوں میں فرق واقع ہوتا ہے اور یہاں سے معلوم ہوا

کہ د^۲ = (د - ی جس گ^۱) (س + ی جس گ^۲) - ی جس گ^۱ جس گ^۲ جس گ^۱ - ب جس گ^۱ + س

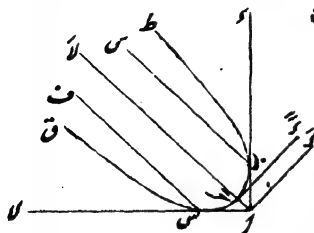
خط منحنی کو کہیں تو دریافت ہوگا اور اس کا مقام ط ب س ق ہی اور مساواتین

$$r = \pm d \text{ وہی مساواتین ہیں جو متعلق}$$

قطر د ب سی اور س ق کی ہیں الا

اور آؤشی محور ہیں اور زاویہ ر یعنی

$$\angle \text{لا} = \angle \text{م} = \angle \text{ا} = \angle \text{د} = 0$$



اور سی = - ۲ د م ا اور ط = ۰ اور ص = ۲ م ا ط اور ص کوئی محور

پر شمار کرنا چاہئے اور ۱۱ فرض کرو کہ ۱۱ = ۲ م ا اور آؤشی نقطہ شدوع ہی

اور اخیر مساوات یہ ہے ۲ = د م ا مثال (۴) ر = د + سی لا ف لا

لو کس اس کا قریب البیضوی کیونکہ ب = ۲ م ا س یا ۰ = م ا × ف = ۰

فرض کرو کہ ر = ک + ط اور لا = لا + ص ۱۱: ک + ط = د + سی (لا + ص)

۱۱: ف (لا + ص) ۱۱: ف لا ۱۱: (م ص ف + سی) لا - ک + ف ص + سی ص + د - ط

= فرض کرو کہ ۲ ص ف + سی = ۰ اور ف ص + سی ص + د - ط = ۰

۱۱: ص = - ۲ م ا اور ط = ۲ م ا د ف - سی اور اب صورت مساوات کی یہ

ہو جاوے گی ف لا - ک = ۰ (۹۹) جبکہ محور ترجیحی ہوں اور

۲ - لا ۲ + لا - لا - لا = ۰ اور اگر زاویہ محور د کے درمیان میں ۹۰ کا فرض

کیا جاوے تو س جس ۲ - ب جس کہ مثبت ہوگا اور جس ۲ = ۲ م ا ص ۹۰ =

۱۱: ر = ۰ اور م = ۳ اور ۱ = ۴ اور س = ۰ اور د = ۶

اور سی = - ۲ م ا اور ص = - ۲ م ا اور ط = - ۳ م ا

$$۴۲ - ۲۷۲ = ۰$$

باب ہشتم

بیضوی کے بیان میں

(۱۰۰) مساوات عام درجہ دوم کی بحث میں ثابت ہوا ہے کہ اگر مرکز نقطہ

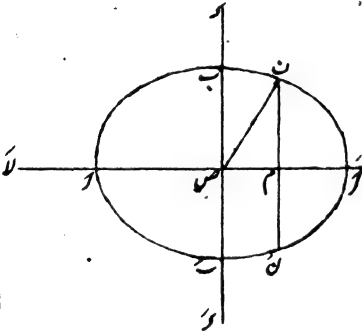
شروع محور و ن مقاطع علی القوائیم کا فرض کیا جاوے تو مساوات بیضوی کی یہ

$$\text{ہوتی ہے } \left(\frac{1}{c}\right) x^2 + \left(-\frac{b}{c}\right) x + \frac{a^2}{c} = 0 \quad \text{یا } x^2 + (-b) x + a^2 = 0$$

جس میں امثال ن اور ق مقادیر مثبت ہیں ہم اب نکالیں گے بوسیدہ

مساوات کی مختلف شکلیں بیضوی کی اب تاکہ اچھی طرح امثال اس مساوات کی

درپٹ ہو سکیں فرض کرو کہ ص مرکز بیضوی کا ہی اور لا لا اور د کو محور متقاطع



علی القوائیم نقطہ ص پر ہیں

اور فرض کرو کہ ص م = لا

اور م ن = د اب ظاہر ہے

کہ جہاں محور خط مماسی تقاطع

کرتے ہیں وہاں

$$\begin{cases} 0 = د & \therefore ن لا = ۰ \\ ۰ = لا & \therefore م ن = ۰ \end{cases}$$

قطع کرو محور لا پر ص = $\frac{1}{م ن}$ اور ص لا = $\frac{1}{م ن}$ اس طرحی لو محور

کر پر ص ب = $\frac{1}{م ن}$ اور ص ب = $\frac{1}{م ن}$ اس صورت میں یہ خط

منحنی کا تا ہی محور کو نقطوں ۱۲ اور ۱۳ پر اب اگر فرض کیا جاوے کہ $h = 1$ ط

اور ص ب = ص اور ط بڑا ہو ص کے تو ق = $\frac{1}{24}$ اور ن = $\frac{1}{ص}$

اسی واسطی مساوات اس خط منحنی کے لیے ہوگی $\frac{r}{r_0} = 1 + \frac{r_0}{r}$ یا $r^2 = r_0^2 + r_0 r$

$$(r_a - r_b) \frac{r_{ab}}{r_b} = r_c \therefore r_{ab} + r_b = r_a + r_c$$

(۱۰۱) ہمنی ایہی (۷۶) مین ثابت کیا ہے کہ خط سخی متحدہ دہی برائیل طر

سی اور لفظی ۱۱ اور ج ب ان حدود پر دافع ہیں اور مسدود

حاصل ہونے کی یہ مساویں $k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ اور (۱۱) اور

لا \equiv ص \pm ص = ص (۲) مساوات (۱) کی طرف سے

اگر کسی را بداند که در این راه چه چیزها می‌باشد و چگونه باید رفت، پس او را به این راه راهنمایی کند.

اگر خط مستقیم کی طرح دو سران نقطوں آ اور آ اور ت پہ کی تو

وہ بالکل گہرے گے خط منحنی کو۔ یہ بھی مساوات (۱) سے معلوم ہوگا۔

کہ واسطے ہر ایک قیمت لاکھ جو کہ کم سی ط سی دو تین تہ کی حاصل ہوئی بغیر

داسے کسی دتر صدم کی جو کہ کم صدم سے ہی حاصل ہو سکنی دو قیمتیں مساوی

وتر العوض مَن اور مَن کے اور علامت \pm کی دریافت ہوتا ہی کہ سمینر

انکی مقابل ایک دوسری کے امن اور یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ جتنا لائبرٹیاں

سی ط کت اوتنی ہی میتین تر کی کشتی ہین ۱۰ ص سے ۱۰ ک یہاں

ہمیں حاصل ہوئی دو برابر فوسین بن^۱ اور بن^۱ بالکل شد۔

اور مقابل ایک دوسرے کی آب اگر لا ہو منحنی اور گشت شروع کریں۔ سی۔ ط۔
 یک تو تا مثبت ہوگا اور ویسی قیمتیں تو کی تکلیف کی جیسی ابھی نکالی ہیں یہاں سے
 معلوم ہوا کہ دو اور قوسین ب۔ آ اور ب۔ ۱ مقابل اور سا کہ ایک دوسری کی ہیں
 اس پر سے معلوم ہوا کہ خط منحنی کو محور لا دو حصوں میں برابر تقسیم کرتا ہے۔ اس پر سے
 مساوات (۲) سی معلوم ہوتا ہے کہ محور کو بھی خط منحنی کو دو حصوں برابر تقسیم
 کرتا ہے اور اسی سبب سے اس خط منحنی کو مناسب ان محوروں کہ کہتے ہیں۔ اس خط
 منحنی کا جو پہلے طرف مرکز کی ہو تا ہے نہیں تو ایک خط مستقیم قطع کر گیا اس خط
 منحنی کو دو سی زیادہ نقطوں پر جو کہ نامکمل ہیں موافق (۱۱) کے۔

$$(۱۰۲) مساوات ۲ = \frac{ص}{ط} (ط - لا) \text{ سی حاصل ہوتا ہے یہ}$$

$$ص ن = لا + ۲ = لا + \frac{ص}{ط} (ط - لا) = ص + ۲ - ص لا$$

یہاں سی معلوم ہوا کہ ص ن نہایت بڑا ہو سکتا ہے جبکہ لا نہایت بڑا ہو۔

یعنی جبکہ لا = ط تو اس صورت میں ص ن بھی برابر ط کی ثابت ہوگا مساوات

گذشتہ سی یہاں سی معلوم ہوا کہ خطوط ص ۱ اور ص ۱ نہایت بڑی خط ہیں

تمام ان خطوط میں سے جو کہ کبھی جاوین مرکز سی محیط تک اس خط منحنی کی اور ص ۱

نہایت کم ہوگا جبکہ لا = ص ن برابر ہو جاوے گا ص کے یہاں سی دریا

ہو کہ ص ۱ اور ص ۱ نہایت چھوٹا ہے ان خطوط میں سے جو کہ کبھی جاسکتے ہیں

مرکز سی محیط تک یعنی محور ۱۱ نہایت بڑا اور ب۔ نہایت چھوٹا ان خطوط میں سے

ہی جو کہ کبھی جاسکتے ہیں مرکز سے گزرتی ہوئی محیط تک ۱۱ کہ محور کلاں کہتے ہیں

اور ب ب کو محور خورد —

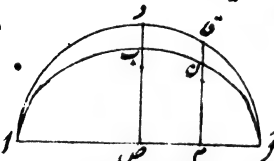
(۱۰۳) نقطے آ اور ب اور آ ب سے اس محور کو کئی کمالات ہیں کوئی نقطہ انہیں سے نقطہ شروع فرض کیا سکتا ہے مثلاً فرض کرو کہ آ نقطہ شروع ہی اور اس محور لآ کا اور مان لو کہ محور کا متوازی ص ب کی ہی اور ام = لا

∴ لا = ص م = ام - اص = لا - ط = مسیدسطی ۲ = $\frac{ص^۲}{ط}$ (ط - لا)
 $\frac{ص^۲}{ط} = (ط - لا - ۲) = (ط - لا - ۲) = (ط - لا - ۲)$ اور بعد دور کرنے
 علامت کی ۲ = $\frac{ص^۲}{ط} = (ط - لا - ۲) = (ط - لا - ۲)$ بوسیله اس
 مساوات کی تناسب ہندسی حاصل ہوگا اور وہ یہ ہے

مربع م ن : سطح ام اور م ۱ :: مربع ب ص : مربع ا ط یا
 م ن : ام × ام :: ب ص : ا ط یہاں سے ثابت ہوتا ہے کہ مربع نصف
 وتر کا گستاڑ ہوتا ہے موافق سطح دو حیطون محور کلان کے اگر ص نقطہ شروع
 فرض کیا جاوے اور ص آ محور کا اور ص ب محور لآ تب مساوات موافق
 اس فرض کے یہ ہوگی ۲ = $\frac{ط^۲}{ص}$ (ص - لا) جبکہ لکھیں ہم مساوات گذشتہ
 میں لا بجای آ اور آ بجای لا کی اور اگر نقطہ شروع فرض کیا جاوے نقطہ
 ب کا تو ۲ = $\frac{ط^۲}{ص}$ (ص - لا)

(۱۰۴) اگر محور کلان اور محور خورد کو برابر فرض کریں تو اس صورت میں مساوات
 بیضوی کی یہ ہو جاوے گی ۲ = ط - لا اور یہ مساوات دائرہ کی ہے جس کا قطر
 برابر ۲ کے ہے یہاں سے ثابت ہوا کہ دائرہ ہی ایک خاص بیضوی ہے جس کا

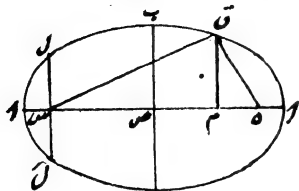
(۷۹) میں ثابت ہوا ہے فرض کرو کہ ۱ دن ۱ ایک دائرہ ہے جس کا قطر ۱ ہے اور
 م ق یا ۱ ایک وتر العرض موافق وتر ص م یا ۱ کی ہے اور فرض کرو کہ ۱ من $(= ۱)$
 وتر العرض ایک بیضوی کا ہے اس صورت میں $۱ = ط - ۲$ لا اور $۲ = ص - ط$ (ط - لا)
 $۱ = ط - ۲$ $۲ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$
 کہ وتر بیضوی اسی مقام کی دائرہ میں ایک نسبت مقررہ موافق محور خور د اور
 کلان کے ہی چونکہ ص چوتھا ہے $ط$ سی ایسا ہے کہ ایک نقطہ دائرہ کا واقع ہوگا باہر
 بیضوی کے سوا دو نقطوں آ اور آ کے جہاں کہ یہ دونوں خط منحنی ملتے ہیں اب اگر
 ایک دائرہ کہیں چاہے محور خور د پر تو اسے جسے ثابت ہو سکتا ہے کہ ہر ایک نقطہ
 دائرہ کا واقع ہے اندر بیضوی کے سوا دو نقطوں ب اور ب کی یہاں سے معلوم ہوا
 کہ خط منحنی بیضوی کا واقع ہے در میان دو محیط دایروں کے



نقطہ آتشی کے بیان میں

(۱۰۵) مساوات $۲ = ط - ۲$ $۲ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$
 $۲ = ل - لا - ۱$ اگر $ل = ط$ کی فرض کیا جائے اور $(= ۲)$
 کہ وتر آتشی اعظم کہتی ہیں۔ چونکہ $ل = ط$ $۲ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$ $۱ = ص - ط$
 $۱ : ۲ : ۳ : ۴ : ۵ : ۶ : ۷ : ۸ : ۹ : ۱۰ : ۱۱ : ۱۲ : ۱۳ : ۱۴ : ۱۵ : ۱۶ : ۱۷ : ۱۸ : ۱۹ : ۲۰ : ۲۱ : ۲۲ : ۲۳ : ۲۴ : ۲۵ : ۲۶ : ۲۷ : ۲۸ : ۲۹ : ۳۰ : ۳۱ : ۳۲ : ۳۳ : ۳۴ : ۳۵ : ۳۶ : ۳۷ : ۳۸ : ۳۹ : ۴۰ : ۴۱ : ۴۲ : ۴۳ : ۴۴ : ۴۵ : ۴۶ : ۴۷ : ۴۸ : ۴۹ : ۵۰ : ۵۱ : ۵۲ : ۵۳ : ۵۴ : ۵۵ : ۵۶ : ۵۷ : ۵۸ : ۵۹ : ۶۰ : ۶۱ : ۶۲ : ۶۳ : ۶۴ : ۶۵ : ۶۶ : ۶۷ : ۶۸ : ۶۹ : ۷۰ : ۷۱ : ۷۲ : ۷۳ : ۷۴ : ۷۵ : ۷۶ : ۷۷ : ۷۸ : ۷۹ : ۸۰ : ۸۱ : ۸۲ : ۸۳ : ۸۴ : ۸۵ : ۸۶ : ۸۷ : ۸۸ : ۸۹ : ۹۰ : ۹۱ : ۹۲ : ۹۳ : ۹۴ : ۹۵ : ۹۶ : ۹۷ : ۹۸ : ۹۹ : ۱۰۰$
 دریافت کرو ایک ایسا نقطہ محور کلان پر جہاں اگر ایک وتر العرض کہیں چاہے
 تو دو گنا اس کا برابر ہو وتر آتشی اعظم کے یہاں $۲ = ل$ یا

$$\frac{ص^۲}{ط^۲} = (ط^۲ - لا^۲) \quad \therefore ط^۲ - لا^۲ = ص^۲ \text{ یعنی } لا^۲ = ط^۲ - ص^۲$$



$$\text{اور } لا = \sqrt{ط^۲ - ص^۲}$$

نقطہ ب کو مرکز فرض کر کے

اور ط کو نصف قطر کیجیو

ایک دائرہ کا بنا ہوا محور کلان کو اور دو نقطوں ء اور س کے تب

$$ص = \sqrt{ط^۲ - ص^۲} \text{ اور } ص = \sqrt{ط^۲ - ص^۲} \text{ منہ } \sqrt{ط^۲ - ص^۲} \text{ منہ } \sqrt{ط^۲ - ص^۲} \text{ منہ } \sqrt{ط^۲ - ص^۲}$$

ایسی نقطے دریافت ہوئی ہیں کہ اگر کسی ایک نقطہ پر ایک دو نقاط میں سے ایک فرض

مثل ل س ن کے کیجا جاوے تو وہ برابر ہوگا و ترا آتشی اعظم کو اب اس خط کو

و ترا آتشی اعظم کہا کریں گے اور نقاط س اور ء کو فوکس یا نقاط آتشی اور دھب

اسکی اگی بیان کیجا دیگی۔

(۱۰۷) کسر $\frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲}$ کو جو کہ تعبیر کرتی ہے نسبت ص س کی طرف ص ء

کے خارج المرکز کہتے ہیں کیونکہ ذوق اس خط منحنی کا دائرہ سی موقوف ہے کسر

اگر خارج المرکز جو کہ عدد ایک سی مکتی ہی فرض کیا جاوے برابر سی کے تو $\frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲}$

$$= ی \text{ یعنی } ی = \frac{ط^۲ - ص^۲}{ط^۲} = ۱ - \frac{ص^۲}{ط^۲} \quad \therefore ۱ - \frac{ص^۲}{ط^۲} = ی$$

جو وقت لکشی یہ قیمت $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ کی مساوات بیضوی میں تو $۱ - ی = (ط - لا)$

(۱۰۸) قیمت خارج المرکز کے اور برسی دریافت ہوئی برابر ط سی کے لیکن

بعض اوقات خارج المرکز کو برابر س کی بھی لکھتے ہیں اور چونکہ $ط - ص = ط ی$

$$\text{اسی واسطی } ص = ط - ط ی = ط (۱ - ی) = ط (ط + ط ی) \text{ بیان سے}$$

دریافت ہوا کہ سطح ۱ س اور ۱ س = مربع کی جو کہ کسی چاروں اوپر بصر کے
(۱۰۹) دریافت کرو فاصلہ نو کے سے کسی نقطہ بیضوی کا فرض کرو کہ

جس = نئی اور دن = نئی :: نئی = (س - ک) + (ن - ل) = (۲۹) ::
چونکہ ک ل و ت س کی ہیں :: ک = ۰ اور ل = - ط ی ::

$$r'(y+u) + (u-r)(y-1) = r'(y+u) + r = y$$

$$r'y + u + r + u + r'y - u - r =$$

$$= ۲ ط ی لا + ی لا = (ط ی لا) : سن = ط ی لا$$
 اسے پورے ثابت ہو سکتا ہے کہ $ن = ط - ی لا$ تمام سوالوں میں جو کہ ضرور
 مقداروں $سن$ اور $ن$ سے تعلق ہیں علامت لا کی دہ لکھنی چاہیے جو
 کہ اسکی ذاتی ہو مشدداً اگر $ن$ ہو درمیان $ب$ اور $آ$ کے توقیت مطلق $سن$
 کے $ط - ی لا$ ہی ہو کہ لا خود نفی ہے۔ جمع کرنی قیمتوں $سن$ اور $ن$
 سے حاصل ہوگی یہ سادہ $سن + ن = ۲ ط = ۱۱$ یعنی فاصلہ
 کسی نقطہ بیضوی کا نقاط آتش سے مساوی ہو کر لان کے یہ خاصیت بیضوی
 کی مشابہ ہے اس خاصیت دائرہ کی سی جہاں کہ فاصلہ مرکز کا محیط سے ہمیشہ ایک
 مقدار مقررہ کی برابر ہوتا ہے۔

(۱۱۰) چونکہ یہ خاصیت بیضوی کی بہت فائزہ مندرجہ پہلی قسم کے عکس
طور پر ہی ثابت کر سکتی یعنی درہت کرو لو کس ایک نقطہ سے کلا جکاں صدہ
رو نقطون آتشی سے اور اسے برابر ایک مقدمہ مقررہ کی ہے یا مساوی

(۱۱۲) اور یہ ظاہر ہے کہ خط ط ن کا ماس ہی کیونکہ ایک خط نہیں کاٹ سکتا ہے
 خط منحنی کو دو نقطوں سے زیادہ پر اور یہاں وہ دو نقطے ایک نقطہ پر منطبق ہو گئے
 ہیں اور علاوہ اسکے ہم ثابت کر چکے کہ ہر ایک نقطہ ن ط کا سوا ہی ن کی
 خارج بیضوی کی ہے۔ فرض کرو کہ نقطہ ر کی لا اور ک و تر ہیں اس صورت
 میں اگر ط ۲ کو ۲ ص لا آ بڑا ہو ط ۲ ص سی تو نقطہ ر کا باہر خط منحنی کے ہے
 واسطی ثبوت اس دعویٰ کے ملاؤ ایک لیس خط نقطہ ر اور مرکز بیضوی میں
 جو کا ٹی بیضوی کو نقطہ ق پر اور فرض کرو کہ لا اور ک و تر نقطہ ن کی ہیں
 اس واسطے ط ۲ کو ۲ ص لا آ بڑا ہی ط ۲ ص سی یا ط ۲ کو ۲ ص لا سے اس واسطی
 ص (لا - لا) بڑا ہوگا ط (۲ - ۲) سی لیکن ص چوتھا ہی ط اس واسطے
 (لا - لا) بڑا ہوگا (۲ - ۲) سی یا (لا + لا) بڑا ہوگا (۲ + ۲) سی
 اس واسطی ص ر بڑا ہی ص ن سی (۲۴) یا نقطہ ر کا خارج بیضوی سے
 لیکن یہ دعویٰ اب ہم ایک عام طور سے ثابت کر چکی۔ اس صورت میں حاصل
 ہو گئی یہ مساواتیں ط ۲ کو ۲ ص لا لا = ط ۲ ص سی ط ۲ کو ۲ ص لا لا = ط ۲ ص سی
 دو چیز کے مساوت اول تفریق کرو مساوتِ دہم میں سے

$$\text{ط } ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ص لا لا} - \text{ط } ۲ \text{ ص سی} = \text{ط } ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ص لا لا} - \text{ط } ۲ \text{ ص سی}$$

$$\text{ص (لا - لا)} = \text{ط } ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ص لا لا} - \text{ط } ۲ \text{ ص سی} \therefore \text{ط } ۲ \text{ کو } ۲ \text{ ص لا لا} =$$

$$\text{ط } ۲ \text{ ص سی} + \text{ط } (۲ - ۲) \text{ ص (لا - لا)} \text{ جو کہ زیادہ ہی ط } ۲ \text{ ص سی لیکن ک و تر}$$
 لا تر ہیں کسی ایک نقطہ ماس کے اس واسطے عموداً ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر ایک

نقطہ ماس پر خارج بیضوی سہی ہے مگر خاص ایک صورتیں جہاں کہ $ر = ۰$
 اور $لا = لا$ یعنی نقطہ $ن$ پر ہیں حاصل ہوگی یہ مساوات $ط^۲ + ص^۲ = لا^۲$
 $= ط^۲$ ہیو سہی بیانی دریافت ہوتا ہے کہ اس خاص نقطہ پر ایک نقطہ ماس

کا منطبق ہی ایک نقطہ بیضوی پر — $غ$ $ث$ $ث$ $ث$ $ث$

(۱۱۳) اگر $ر$ اس آ نقطہ شروع ہو تو مساوت بیضوی کی یہ ہے

$$ر = \frac{ص^۲}{ط^۲} (لا - لا^۲) یا ط^۲ + ص^۲ = لا^۲ - ط^۲ ص^۲ = لا^۲ : اور مساوت$$

اسکی ماس کے بطور قوسہ بالا کے یہ درپشت ہوگی $ط^۲ + ص^۲ = لا^۲ - ط^۲ ص^۲$

$$(لا + لا^۲) = ۰ : اگر مساوت بیضوی کی ہو $ر = م - لا - ن لا تب$$$

$$مساوت ماس کے یہ ہوگی $ر = \frac{م}{ط} (لا + لا^۲) - ن لا$ اگر صورت$$

$$عام خط منحنی کی ہو یہ $ط^۲ + ص^۲ + لا + س لا + د ر + ی لا + ف = ۰$$$

توصورت عام ماس کے یہ ہوگی

$$ر - ۰ = \frac{س لا + د ر + ی}{ط^۲ + ص^۲ + لا} (لا - لا^۲) یا$$

$$(ط^۲ + ص^۲ + لا + د) + ر (س لا + ص ر + ی) + لا + د ر + ی لا + ف = ۰$$

اور فرض کر دو کہ $ر = م - لا + د$ مساوت ماس بیضوی کی ہو اور چونکہ مساوت

$$ماس بیضوی کی ثابت ہوئی ہے $ط^۲ + ص^۲ = لا^۲$: $ط^۲$$$

$$ر = \frac{ص^۲}{ط^۲} لا + ص^۲ ہیو سہی مقابلہ کرنے سے اس مساوت کو مساوت$$

$$ر = م - لا + د سے ہیں یہ حاصل ہوگا $م = \frac{ص^۲}{ط^۲} لا$ اور $د = ص^۲$$$

$$یا $ر = \frac{ص^۲}{ط^۲}$ لیکن مساوت بیضوی کے یہ ہے $ر = \frac{ص^۲}{ط^۲} (ط^۲ - لا^۲) :$$$

$$\begin{aligned} \frac{ص}{ط} &= \frac{ص}{ط} (ط - لا) \text{ یا } ص = \frac{ط - لا}{ط} = ۱ - \frac{لا}{ط} \therefore \\ \frac{لا}{ط} &= ۱ - \frac{ص}{ط} \therefore لا = ط - \frac{ط \times ص}{ط} \text{ جبکہ لکھی مبنی یہ قیمت} \\ لا کے اس مساوات میں م &= \frac{ص \times لا}{ط} = \frac{ط \times ص - ط \times ص}{ط} \text{ اور جبکہ} \\ لکھی مبنی اس مساوات میں م &= \frac{ص}{ط} \text{ تو م} = \frac{ط \times ص - ط \times ص}{ط} \\ &= \frac{ط \times ص - ط \times ص}{ط} \end{aligned}$$

یہاں سی مبنی یہ حاصل ہوتا ہے $م = ط + ص = د$ یہ تعلق ضرور ہونا چاہی
درمیان امثال مساوت $و = م + لا + د$ جبکہ یہ فرض کیا کہ مساوت ماس کی
(۱۱۴) دریافت کردہ وہ دو نقطہ جہاں کہ ماس کا تہا ہی محور کو۔ ہمسواتین
 $ط + م + لا = ط + ص$ فرض کر دو $و = د$ $\therefore ص = لا = ط + ص$
اور $لا = ط = \frac{ط}{ط} = ص$ اور اس طرح $و = ص = ط = \frac{ص}{ط}$ یہاں سی دریافت
ہوتا ہے کہ سطح $ص$ اور $م = مربع ۱ ص$ یا $ص \times ص = م = ۱ ص$ اور
سطح $ص$ اور $ن = مربع ب ص$ یا $ص \times ب = ن = ب ص$ چونکہ
 $ص (= \frac{ط}{ط})$ میں نہ نہیں پایا جاتا ہے اس لیے سطح یہ سمجھنا کہ ایک سی ہر دور
تمام اون بیضیوں کے جنکا محور کلان اور وتر العوض در سطحی نقطہ تماس کے ایک ہا
ہیں اور چونکہ دائرہ ہی اوپر محور کلان کے ایک قسم کا بیضی خیال کیا جاسکتا ہے
اون تمام بیضیوں میں سے اس لیے فاصلہ $ص$ ایک ہی ہے در سطحی ایک بیضی کا
اور اس کی گرد کی دائرہ کی یعنی اس دائرہ کی جہاں قطر محور کلان بیضی کا ہے
اور چونکہ $ص (= \frac{ط}{ط})$ کی سطح کا اعلق سے نہیں کہتا ہے اس لیے سطحی

دو ماس دو طرفوں ایک وتر کی سے ایک ہی نقطہ بر طین کے اوپر محور کے ادرساؤ
 اوس ماس کی جو کہ دوسری طرف وتر سی کہی جاوے دریافت ہو سکتی ہی جبکہ
 کو بجای دے کی لکین مساوات ماس کی مین (۱۱۱)

(۱۱۵) فاصلہ م ط پای وتر سی اوس نقطہ تک جہاں کہ ماس کا ٹاٹا ہی محور لا کو

$$\text{ماس العرض کہلاتا ہی بیضوی مین } م ط = ص ط - ص م = \frac{ط^2}{لا} - لا =$$

$\frac{ط^2 - لا^2}{لا}$ یہاں سی یہ حاصل ہوگا سطح ص م اور م ط = سطح کم اور م ا تر
 (۱۱۶) چونکہ مساوات ماس کے یہ ہی ط م و ص لا لا = ط ص فرض کرو

اس مین لا = ط :: ر = ص :: ص ط لا = ط ص اور لا = ط یہاں

ثابت ہوگا کہ ماس راس محور کلان پر نمود ہی اوس محور پر اور نقطہ ب مساوات
 ماس کی یہ ہی ر = ص سیوٹے بطور سابق کے ثابت ہو سکتا ہی کہ نقطہ

ب پر ہی ماس نمود ہی محور پر۔ مساوات ماس کے یہ ہی ط م و ص لا لا =

ط ص یا ر = ص لا لا + ص ط اگر خط ن ص کہی جاوے یہاں تک کہ

و د ملی بہر خط بیضوی نقطہ ن پر علامتین و ترون ن کی بالکل مختلف و ترون

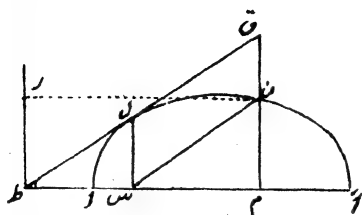
ن کے سی مین سیوٹے امثال۔ ص لا ویا ہی رہیگا وسطی اوس ماس کے

جو کہ کہی جاوے نقطہ ن سی یا ماس نقا ط ن اور ن پر متوازی ایک دوسرے

کی مین (۴۳) ش ش ش ش سے

(۱۱۷) دریافت کرو مساوات اوس ماس کے جو کہ کہی جاوے انجام وتر اتنی

عام مساوات ماس کی یہ ہی ط م و ص لا لا = ط ص لیکن صورت حال



مین نقطہ ل پر لا = ط ی

اور $\frac{ص}{ط} = \frac{سی}{اسی واسطی}$

$\frac{ط}{ا} = \frac{ص}{لا} - \frac{ص}{ط} = ط ی$

$\frac{ط}{ص} یعنی ر = ط + ی لا$

اگر وتر تو یا م ق قطع کری بیضوی کو نقطہ ن پر تو سن = ط + ی لا = م ن = سن

(۱۱۸) درنیت کردہ نقطہ جہانکہ یہ خاص ماس کا تہا ہی محور کو - فرض کر دو کہ

$ر = ط$. $\therefore لا = ص = ط = ط ی$ نقطہ ط سی کیچو خط ط ر کا عمود خط اص

پر اور نقطہ ن سی کیچو خط ن ر کا متوازی اص کے تب صرف مطلق قیمتیں ص

اور ص ط کی لکھنی سی ہیں یہ حاصل ہوگا $ن ر = م ط = ص ط + ص م =$

$\frac{ط}{سی} + لا = ط + ی لا = ط ی$ سن اسی واسطی فاصلہ کسی نقطہ ن کا ہے

اور خط ط ر سی آپس میں ہی نسبت رکھتی ہیں $:: ی : ا$ اس خط ط ر کو خط بنیاد

کہتے ہیں کیونکہ مقام اس خط کا اور فوکس کا جانکر ایک بیضوی کسی قدر خارج مرکز

کا کیجا جاسکتا ہے اور ترکیب اسکی بیان کیجا دے گی کسی ایک صفحہ آئینہ میں -

اگر $لا = ط$ تو ہمیں یہ حاصل ہوگا $ر = ط$ اسی واسطی ماس انجام میں وتر

آتش اعظم کے کا تہا ہی محور کو اس نقطہ پر جہاں یہ محور ملتا ہے گرد کیچے کے دایرے

کیچو ق م کو بہاننگ کہ وہ قطع کری بیضوی کو نقطہ ن پر تو

$ق ن \times ق ن = س م^2$ (۱۱۹) درنیت کردہ طول اوس عمود کا

جو کہ کیجا جادہ نقطہ آتشی اوپر ماس کے - فرض کر دو کہ سن = اور ر =

بالمحسبہ

$\text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots\dots\dots (۱)$ اور مساوات ماس کی خط تان پر
 یہی $\text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots\dots\dots (۲)$ اور مساوات عمود میں دکی
 (جس کے وتر - ن اور - ہین) یہی $\text{ط}^2 = \text{ص}^2 (ن + ن)$ اور یہ خط جو
 عمود ماس پر ہی اسبواطی $\text{ط}^2 = \text{ص}^2 (ن + ن) \dots\dots\dots (۳)$ اب مساوات عمود میں دکی
 یہ ہوگی کہ $\text{ط}^2 = \text{ص}^2 (ن + ن) \dots\dots\dots (۴)$ اگر ہم دکر کرنی کے اوتار
 کو بوسیله مساوات (۱) اور (۲) اور (۳) کی تو حاصل ہوگی ہمیں ایک
 ایسی مساوات جس میں ط اور ص باقی جادین کی لیکن اس دور کرنی میں ط اور
 ص ایک ہی فرض کسی گئی ہیں مساوات (۲) اور (۳) میں اسبواطی جو مساوات کہ
 بعد اس عمل کی پیدا ہوگی و مساوات کو نقطہ قاطع کی ہوگی یعنی لو کہ اس اگلی نقطہ قاطع کی ہو
 مساوات (۳) سے $\frac{\text{ط}^2}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ط}^2}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ط}^2}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ط}^2}{\text{ص}^2} \dots\dots\dots$ مساوات (۴) سے
 حاصل ہوگا اسبواطی $\frac{1}{\text{ط}^2} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2 (ن + ن)} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2 (ن + ن)}$
 اور مساوات (۳) سے $\frac{\text{ط}^2}{\text{ص}^2} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2 (ن + ن)} = \frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2 (ن + ن)}$ بوسیله لکھنی
 قیمت لاکے جبکہ درج کی نہی قیمتیں ط اور ص کی مساوات (۱) میں تو یہ حاصل ہوگا
 $\text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{ط}^2 (ن + ن) = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots\dots\dots \{ \text{ط}^2 + \text{ص}^2 \}$
 $\therefore \text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{ط}^2 (ن + ن) = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots\dots\dots \{ \text{ط}^2 + \text{ص}^2 \}$ لیکن ص
 $(\text{ط} - \text{ص}) \therefore \text{ط}^2 - \text{ص}^2 = \text{ط}^2 (ن + ن) = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots\dots\dots \{ \text{ط}^2 + \text{ص}^2 \}$
 $\text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{ط}^2 (ن + ن) = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots\dots\dots \{ \text{ط}^2 + \text{ص}^2 \}$
 $\text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{ط}^2 (ن + ن) = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots\dots\dots \{ \text{ط}^2 + \text{ص}^2 \}$

$$ر^2 = (و^2 + لا^2) + (لا + ن)^2 = (و^2 + لا^2) + (و^2 + لا^2 + ۲ون + ن^2)$$
 جبکہ تقسیم کیا جنے دونوں طرف مساوت کو مقدار $(و^2 + لا^2 + ن^2)$ پر تو یہ
 حاصل ہوگا $ط = و^2 + لا^2$ جو کہ مساوت ایک دائرہ کی ہے جس کا نصف قطر
 ہی یہاں سی ثابت ہوا کہ لو کہ $و$ کا ایک دائرہ ہی جس کا قطر محور کلان بیضی کا
 ہی ہو سید مساوت $و$ سے اور مساوت $ص$ $(و = \frac{ر}{2} لا)$ کی ہم ثابت
 کر سکتی ہیں کہ یہ دونوں خط $ص$ $و$ اور $و$ کے خط بنیادی پر —
 (۱۳۱) دریافت کر دہ زاویہ جو کہ فاصلہ $س$ $ن$ کا بنا تا ہی مماس $ن$ $ط$ سی
 مساوت مماس کی یہی $و = \frac{ص لا^2}{ط و^2} + لا$ اور مساوت خط $س$ $ن$
 کی جو کہ گذر تا ہی نقطہ $س$ سی (جس کے وتر $ن$ اور صغریٰ) اور نقطہ $ن$
 سی (جس کے وتر $لا$ اور $و$ ہیں) یہ ہو گئی $و - و^2 = \frac{و^2 - لا^2}{لا - لا} = (لا - لا) =$
 $\frac{و^2}{لا + ن}$ اور مماس $ن$ $ط = مس (ن س ص - ن ط ص)$

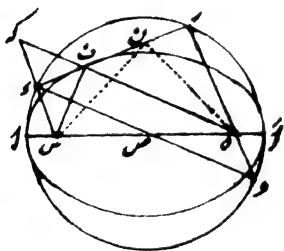
$$= \frac{ط و^2 + ص لا^2 + ص ن^2}{و^2 (لا + ن) - ط ص لا^2} = \frac{لا + ن}{لا - لا} + \frac{ص لا^2}{ط و^2} =$$

$$\frac{ط ص ن^2 + ص ن^2 لا}{و^2 (لا + ن) - ط ص لا^2} = \frac{ص ن^2 (ط + لا)}{و^2 (لا + ن) - ط ص لا^2}$$
 اگر ہم دریافت
 کیا جاہن مماس $و$ $ط$ کا تو ہمیں صرف $ن$ چاہئے کہ پہلی عمل میں رکھنا
 جاہی اس کی وسیلہ سی ہمیں حاصل ہوگا $مس و ن ط = \frac{ص ن^2}{ط}$ اس کی وسیلہ
 سی دریافت ہو سکتی ہے قیمت $س و ن ر = مس (و ن ط - و ن ط) =$
 $مس و ن ط = \frac{ص ن^2}{و}$ یہاں سی ثابت ہوا کہ دو زاویہ $س$ $ن$ $ط$ اور $و$ $ن$

کی برابر میں یا ماس ٹسی نقطہ بیضوی کی مساوی زاویہ بناتی ہے۔ فاصلوں نقطہ
آتش کی سے یہ چھت روشنی کی ہے یعنی اگر ایک کرن ٹککر نقطہ ء سی
رن کو پر گری اور پراؤس سے منعکس ہو کر سمت ن س میں گذری تب زاویہ
ہ ن ر کا برابر ہوگا زاویہ س ن کو لیکن بیضوی میں یہ دونوں زاویہ مساؤ
ہوتی ہیں اب اگر روشنی نقطہ ء بر رکھی چاؤی تو عام کرن منعکس ہو کر نقطہ
س پراؤینگے اسوٹے نقاط ء اور س کو نقاط آتشی یا فوکس کہتے ہیں یہ ایک
خاصیت مشہور ہے اور اب ہم اسکو ایک اور طور سے ثابت کریں گے۔ - موافق (۱۱۹)

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{\text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2} \text{ اور } \frac{\text{ص}^2}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ر}} \text{ تہ } \frac{\text{ص}^2}{\text{ر}} = \frac{\text{ص}^2}{\text{ر}} \\
 &= \frac{\text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2} + 1 \sqrt{\frac{\text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2}} \\
 &= \frac{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}} = \frac{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}} = (114) \\
 &= \frac{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}} = \frac{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}} = \frac{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}}{\text{ط}^2 \text{ص}^2 \text{لا}}
 \end{aligned}$$

کرف سے کو خط کرف رسی اور ملا دے کہ جو کہ قطع کرتا ہی ف کو نقطہ آبر
 (۱) پہلی ہم یہ ثابت کر چکی کہ ف د ماس بیضوی کا ہی کیونکہ اگر کوئی اور نقطہ
 خط ف و پر ہو تو ظاہر ہی کہ سن + ن = ک + ن ہ برابر ہوگا کہ ۲ ط
 یہاں سے ثابت ہوا کہ ہر ایک نقطہ خط ر ف و پر سو اسی ف کی خارج بیضوی سے



(۲) لو کہ نقطہ د کا وہ دایرہ ہی
 جو کہ گرد بیضوی کی کسی چابک و سطحی ہو
 اس مطلب کے کیچہ ر متوازی سے
 اور ملا دے اب چونکہ مثلث س و ف

کا س و ف مثلث کہ ف کی ہر تو زاویہ س و ف قائمہ ہوگا یا س و اور ہ
 عمود ماس پر ہیں چونکہ س و = کہ و اور س و = ص و کی تو ص و متوازی
 کہ و کی ہوگا اور ص و = $\frac{1}{p}$ کہ و = $\frac{1}{p}$ (س و ف + ہ) = ص و

(۳) سطح س و اور ہ و = مربع بص فرض کر دے کہ خط ر ہ دایرہ سی ہی
 نقطہ و پر ملتا ہی اور ملا دے و اور چونکہ زاویہ و ر و قائمہ ہی اور نقاط و اور و
 محیط دایرہ پر ہیں تو خط و ص و خط مستقیم اور قطر دایرہ کا ہوگا یہاں سے معلوم ہوا

(۱۲۳) دریافت کرو کہ کس نقطہ کا ظاہر ہے کہ

$$(۱) \dots\dots\dots ط^۲ ر^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲$$

$$(۲) \dots\dots\dots اور ط^۲ ر^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲$$

$$(۳) \dots\dots\dots اور ر = ط^۲ ر^۲ / ص^۲ لا^۲$$

اگر عمل کریں ہم ان مساواتوں پر جب کہ فقرہ (۱۲۰) میں کیا تھا بسید
عمل کے دور کر کے لا اور ر کو حاصل کریں گی ہم یہ مساوت

$$ص^۲ ر^۲ + ط^۲ لا^۲ = (ر^۲ + لا^۲) \text{ یہ مساوات مثلاً ایک بعضی کی طرح جکا کر لیں}$$

کیا جائیگا۔ نیز نیز (۱۲۴) دریافت کردہ زاویہ جو کہ خط ص ان

ماس مساوات ص ان کی یہ ہے کہ $لا^۲ / لا^۲$ اور مساوت ماس ط ان کی یہ ہے کہ

$$ر = ص^۲ لا^۲ / لا^۲ + ص^۲ ر^۲ \text{ ماس ص ان ط} = \text{ماس (ان ص) - ان طص}$$

$$= \frac{\text{ماس ان ص} - \text{ماس ان طص}}{\frac{\text{ماس ان ص} + \frac{\text{ط}^۲ \text{لا}^۲}{\text{ص}^۲}}{\frac{\text{ط}^۲ \text{لا}^۲}{\text{ص}^۲} + \frac{\text{ط}^۲ \text{ر}^۲}{\text{ص}^۲}}} = \frac{\text{ماس ان ص} - \text{ماس ان طص}}{\frac{\text{ماس ان ص} - \text{ماس ان طص}}{\frac{\text{ط}^۲ \text{لا}^۲}{\text{ص}^۲} + \frac{\text{ط}^۲ \text{ر}^۲}{\text{ص}^۲}}}$$

$$\frac{\text{ط}^۲ \text{لا}^۲ + \text{ط}^۲ \text{ر}^۲}{\text{ط}^۲ \text{لا}^۲ - \text{ط}^۲ \text{ر}^۲} = \frac{\text{ط}^۲ \text{ص}^۲}{\text{لا}^۲ (ط - ر)} = \frac{\text{ط}^۲ \text{ص}^۲}{\text{لا}^۲ \text{ان}} \text{ یہاں ان تعبیر}$$

ہو کہ مثلث ص ر س مساوی مثلث ص ہ کی ہی اور سطح س ر اور ہ =

سطح ر ہ اور ہ = سطح ا ہ اور ا ہ = مربع ب ص (۱۰۸)

(۴) فرض کرو کہ س ف = نق اور ہ ف = ط - س ف = ط - س ف = ط

اور مان لو کہ س ہ = ع اور ہ ر = ع تو ع = ص ان کی کیونکہ لیب مشابہ ہونی سہوں کے

$$\text{ص ان : ص ف :: ہ ر : ہ ف} = ع : ع = \frac{\text{ط}^۲ \text{ص}^۲}{\text{لا}^۲ \text{ان}} \times \text{ع اور چونکہ اہ پر نسبت ہو کہ ع ع} = \frac{\text{ط}^۲ \text{ص}^۲}{\text{لا}^۲ \text{ان}}$$

کرتا ہی خارج المرکز کو

(۱۲۵) مساوت صد = صد جس صد دوسری سین حاصل ہوگا یہی

طی = ط جس صد = جس صد = صد اور = جس صد

سی سین حاصل ہوگا صد = ن جس صد = جس صد =

طی = زاویہ صد = زاویہ صد اور یہاں ثابت ہوا کہ صد

متوازی ہی ہوں گے اب اگر صد کی کھینچا جاوے متوازی ماس ط ن کر جو کہ

لیکھا ہوں گے نقطہ سی مین تو ن ی = صد = صد =

عمود ماس کے بیان میں

(۱۲۶) عمود ماس کسی نقطہ خط منحنی کا وہ خط ہی جو کہ کھینچا جاوے نقطہ ماس

سی عمود ماس پر دریافت کرو مساوت عمود ماس ن گ کی مساوت

اوس خط کی جو کہ گزری نقطہ ن سے (جسکے وتر لا اور سین) یہی

ر = ر = ۱ (لا - لا) لیکن یہ عمود ہی ماس پر چکی مساوت یہی ر =

ص لا ص لا + ص ص = ۱ = ط ص سیو اسی مساوت عمود ماس کے یہی

ر = ر = ط ص لا (لا - لا) - (۱۲۷) دریافت کرو وہ نقطہ

جہاں کہ عمود ماس کا تا ہی محور کو فرض کرو = ۰ = ر = ط ص لا (لا - لا)

لا = لا = ص لا = ط ص لا = ی لا = ص گ اور اب فرض کرو کہ

لا = ۰ = ر = ط ص لا = ط ص لا = ط ص لا = ص گ

یہاں سے ثابت ہوگا کہ ر = ص ص = ص گ = ط ی = ی لا

فاصلہ تک پای وتر سے پای عمود مماس تک خط پائین کھینچا جائے اور قیمت
 اسکی یہ ہو گا۔ لا۔ لا۔ = ص^۲ ط^۲ (۱۲۸) قیمتوں نکالی ہوئی تک
 اور ص^۲ ک اور ص^۲ ک سی یہ حاصل ہوتا ہی نہ کہ = ص^۲ ط^۲ + ص^۲ لا^۲

$$= \sqrt{\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} + \frac{(\text{ط}^2 - \text{لا}^2)}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2 - \text{لا}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}}{\text{ط}}$$

 اور $\sqrt{\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ط}^2 - \text{ص}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 - \text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{2\text{ص}^2 - \text{ط}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{2\text{ص}^2 - \text{ط}^2}}{\text{ط}}$
 اسطوری قیمت نہ کہ = ص^۲ ط^۲ فی اسطوری سطح نہ کہ اور نہ کہ
 = ص^۲ ط^۲ = سطح سران اور نہ کہ اور نہایت بڑی قیمت عمود مماس کی
 حاصل ہوگی جبکہ لا۔ = یہاں سی معلوم ہوگا کہ انجام محور خورد نہایت بڑی قیمت
 عمود مماس = ص اور اسطوری ثابت ہوگا کہ نہایت کم قیمت عمود مماس کے
 انجام محور کلان پر = ص^۲ ط^۲ برابر نصف وتر اتنی اعظم کے ہر (۱۰۵) اور
 نہ کہ = ص^۲ ط^۲ فی اسطوری کیونکہ نہ کہ = ص^۲ ط^۲ + ص^۲ ک^۲

$$= \sqrt{\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} + \frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{2\text{ص}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{2}\text{ص}}{\text{ط}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{ص}^2}}{\text{ط}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} + \frac{(\text{ط}^2 - \text{لا}^2)}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2 - \text{لا}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}}{\text{ط}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ط}^2 - \text{ط}^2 + \text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}}{\text{ط}}$$

$$\frac{\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}}{\text{ط}} = \sqrt{\frac{(\text{ط}^2 + \text{ص}^2)(\text{ط}^2 - \text{ص}^2)}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{(\text{ط}^4 - \text{ص}^4)}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{\text{ط}^4 - \text{ص}^4}}{\text{ط}}$$

 نہ کہ = نہ کہ + نہ کہ = نہ کہ + نہ کہ = نہ کہ + نہ کہ = نہ کہ + نہ کہ

$$= \sqrt{\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} + \frac{(\text{ط}^2 - \text{لا}^2)}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2 - \text{لا}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}}{\text{ط}}$$

$$= \sqrt{\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}^2} + \frac{(\text{ط}^2 - \text{لا}^2)}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2 - \text{لا}^2}{\text{ط}^2}} = \sqrt{\frac{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}{\text{ط}^2}} = \frac{\sqrt{\text{ص}^2 + \text{ط}^2}}{\text{ط}}$$

$$\sqrt{\frac{\text{طی}^2 \text{ص}^2 - \text{لا}^2 \text{ص}^2 \text{ی}^2 + \text{ط}^2 \text{ص}^2}{\text{ص}^2}} = \frac{\text{طی}^2 \text{ص}^2 - \text{لا}^2 \text{ص}^2 \text{ی}^2 + \text{ط}^2 \text{ص}^2}{\text{ص}^2}$$

$$\sqrt{\frac{\text{طی}^2 \text{ص}^2 - \text{لا}^2 \text{ص}^2 \text{ی}^2 + \text{ط}^2 \text{ص}^2}{\text{ص}^2}} = \frac{\text{طی}^2 \text{ص}^2 - \text{لا}^2 \text{ص}^2 \text{ی}^2 + \text{ط}^2 \text{ص}^2}{\text{ص}^2}$$

$$\sqrt{\frac{\text{طی}^2 \text{ص}^2 - \text{لا}^2 \text{ص}^2 \text{ی}^2 + \text{ط}^2 \text{ص}^2}{\text{ص}^2}} = \frac{\text{طی}^2 \text{ص}^2 - \text{لا}^2 \text{ص}^2 \text{ی}^2 + \text{ط}^2 \text{ص}^2}{\text{ص}^2}$$

یہاں سے معلوم ہوا کہ ک = ی × س ک اگر ایک عمود کے ل کا کسی جادو نقطہ کے س سے سن یا ہن پر تب مثلث ن ک ل کا شاہ ہو گا مثلث س ن ل

کہ اس میں س ن ل = ن ک × ی یا = ن ک = $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}}$ = $\frac{\text{ص}^2}{\text{ط}}$ وتر
آتش اعظم — (۱۲۹) جو کہ ماس مساوی زاویہ بناتا ہے فاصلوں نقطہ

آتش سے اور عمود ماس عمود ہی ماس پر اس میں یہی مساوی زاویہ بنا دیکھا
نقطہ آتش سے لیکن یہ دعویٰ بطریق آئندہ کی یہی ثابت ہو سکتا ہے

س ک : ہ ک :: س ص : ص ک : ہ ک + ص ک

:: ط ی - ی لا : ط ی + ی لا

:: ط - ی لا : ط + ی لا

:: س ن : ہ ن

یہاں سے ثابت ہوا کہ س ک : ہ ک :: س ن : ہ ن اس میں حکم ایک شکل
چہی مقالہ بقید س کے زاویہ س ن ہ کا : تصنیف کیا گیا ہے خط ن ک سے

قطر و کج بیا نہیں

(۱۳۰) قطر کی تعریف ہمیں فقرہ (۲۶) میں کی ہے کہ وہ ایک خط ہے جو کہ

تصفیف کرتا ہی تمام ستوازی و ترون کو ہم اب ثابت کریں گے کہ تمام قطر بیضوی
کی خطوط مستقیم ہیں اور مرکز بیضوی سے گزرنی ہیں لیکن کچھ بات بالکل غلط ہے
اور کچھ ثبوت کی حاجت نہیں رہ سکتی ہے کیونکہ کوئی خط نہایت ضعیف نہ ہو سکتا ہے تو ازلی
و تہمتی کو بغیر خود گزرنی کی مرکز پر کسی فرض کر دے کہ $1 = 1 + 0$ مساوت ایک
دوہنگی ہے اور مساوات بیضوی کی یہ ہے $ط^2 + ص^2 = لا^2$ بدلہ لفظ
شروع لفظ تصفیف دتر پر چلے دتر $لا$ کو $لا$ میں اگر ہم لکھیں $لا$ و بجای
تو $لا$ اور $لا$ بجای $لا$ کی تو اس صورت میں مساوت دتر کی یہ ہوگی

$$لا + لا = (لا + لا) + د \text{ اور چونکہ یہی غلط ہے کہ } لا + لا = لا + لا \text{ اس پر}$$

$$لا + لا = لا + لا \text{ اور صورت مساوت بیضوی کی یہ ہو جاوے گی } ط^2 + ص^2 = لا^2$$

$$ص^2 + لا^2 = لا^2 + لا^2 = ط^2 + ص^2 \text{ اب دریافت کرو کہ ان دتر کا ثبات ہی خط منحنی کو}$$

$$\text{دوسری اس کے لکھو } لا + لا بجای لا کے مساوت گذشتہ میں : ط^2 + ص^2 = لا^2 + لا^2$$

$$+ ص^2 (لا + لا) = ط^2 + ص^2 + لا^2 + لا^2 + ص^2 + ص^2 (ط^2 + ص^2 + لا^2 + لا^2)$$

$$+ ط^2 + ص^2 + لا^2 = ط^2 + ص^2 \text{ لیکن چونکہ نقطہ شروع دتر کی نقطہ تصفیف}$$

$$\text{پہلی ہی اس پر دو تہمتیں لا کی آئیں برابر ہونی جائیں اور علامتیں ان دونوں کی}$$

$$\text{مختلف یعنی دوسرا جز مساوت گذشتہ کا مساوی صفر کی ہونا چاہئے}$$

$$\text{اس مساوت سے نسبت تو اور لا معلوم ہو جائے}$$

$$ط^2 + ص^2 = لا^2$$

یہاں دتر سے مراد دتر ہندسی ہی اور نہ بعینہ وہ دتر جس کا ذکر پہلی ریاضی اور دتر

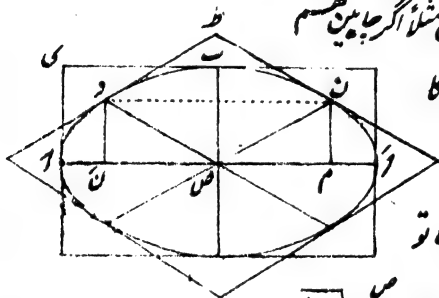
ہو کہ یہ دتر نصف پہلی دتر کا ہوتا ہے۔

اور چونکہ ہمیں د داخل نہیں رکھتا ہی اسی واسطے یہ ایک سی ہوگی واسطے کسی دتر
 جو کہ متوازی $\alpha = 1$ لا + د کی ہر یہاں سی درپشت ہوگا اگر ہم لا اور د کو غیر
 منقطع فرض کریں تو مساوت ط $\alpha + \alpha = \alpha$ مساوت نقطہ تصغیر اور ہر ایک کو
 یہ ط ہر سی کہ یہ مساوت خط مستقیم کی ہر جو کہ مرکز پر سی گذرنا ہی برعکس
 کوئی خط مستقیم گذرنا ہو مرکز پر سی ایک قطر ہی۔

(۱۳۱) ایک قطر دوسری قطر کا متجانس اسوقت کہ ہاں ہی جبکہ قطر اول تصغیر
 کری تمام دتر و دکنو جو کہ متوازی دوسری قطر کی ہوں یہاں سی ثابت ہوگا کہ محور کلان
 اور محور خورد متجانس ایک دوسری کے ہیں اور مساوت ط $\alpha + \alpha = \alpha$ مساوت
 مرکز نقطہ شروع ہر اور قطر متجانس تقاطع علی القوائیم ہیں اگر ایک خط منحنی ایسا ہو
 جس کے دتر ترجی ہیں یعنی عمود ہوں اور ہر کی مساوت میں صرف لا اور د باسی محاذ ہیں
 اور مقدار مقررہ تو اس صورت میں ہی محور اس خط منحنی کے ہی قطر متجانس ہوگی کیونکہ
 واسطے ہر ایک قیمت ایک کی دتر اور دتر العرض میں سی دوساوی اور مختلف علامتوں
 کی قیمتیں دوسری کے حاصل ہوتی ہیں اس مساوت کی سبب سی دریافت ہوں گے
 اور مساوتیں جسکی محور ترجی اور متجانس قطر ہوں جبکہ معلوم ہوگی تمام وہ دتر واسطے جسکی مساوت
 بیضوی کی ہی رہتی ہر وقت تبدیل کرنی دتر کوئی فرض کرو کہ مساوت بیضوی کی ہی ہو
 ط $\alpha + \alpha = \alpha$ مساوت اور مساوتیں واسطے تبدیلی مست محور دکنی ہیں ہر واقعہ
 (۵۷) $\alpha = \alpha$ لا جس + د جس + اور لا = لا جس + د جس + جبکہ لکھی ہوتی ہیں
 قیمتیں لا اور لا کی مساوت گذشتہ میں تو حاصل ہوگا یہ

$\text{ط}^2 (\text{جس}^2 + \text{جس}^2) + \text{ص}^2 (\text{لاجم}^2 + \text{لاجم}^2) = \text{ط}^2 \text{ص}^2$ یا
 $(\text{ط}^2 (\text{جس}^2) + \text{ص}^2 (\text{لاجم}^2)) + (\text{ط}^2 (\text{جس}^2) + \text{ص}^2 (\text{لاجم}^2)) = \text{ط}^2 \text{ص}^2$
 $2 + (\text{ط}^2 (\text{جس}^2) + \text{ص}^2 (\text{لاجم}^2)) = \text{ط}^2 \text{ص}^2$ اگر ہم اس مساوات کو
 اسطرح تبدیل کیا جائے کہ ہر ایک کے محور اقطار متجانس ہو جاویں تو اسلیٰ لازم ہی ہے
 کہ لا^2 کو دور کریں اور چونکہ اس مساوات میں ہم نے دو مقدار غیر منفردہ لا اور ر کے
 داخل کئی ہیں اس لیے ہم انہیں $\text{لا}^2 =$ کی فرض کر سکتے ہیں اب ہمیں حاصل
 ہوگی یہ شرط $\text{ط}^2 (\text{جس}^2 + \text{جس}^2) + \text{ص}^2 (\text{لاجم}^2 + \text{لاجم}^2) =$ یعنی $\text{مس}^2 \text{ر}^2 =$
 ص^2 اب اس مساوات کی وسیلہ سے دو زاویہ لا اور ر کی دریافت نہیں ہوگی لیکن
 درحقی ایک خاص قیمت ایک زاویہ کی قیمت دوسری زاویہ کی قیمت ہوگی یہاں سے
 معلوم ہوا کہ لاناہایت ایسی مساواتیں ہو سکتی ہیں جس کے محور قطر متجانس ہوں
 اگر شکل آئینہ بین کیچین ہم خط ص^2 بنانا ہوا کہ لا زاویہ ر کا خط ص^2 لا سے
 ص^2 بنانا ہوا کہ زاویہ ر کا (جس کے ماس - ص^2 لا م ر ہی) ص^2 لا سے تب
 ص^2 لا اور ص^2 لا قطر متجانس ہیں اور چونکہ حاصل ضرب ماسوں کا منفی ہے اس لیے
 اگر ص^2 لا کیچین ہم زاویہ لا ص^2 لا میں تو ص^2 لا کیچنا جائے زاویہ لا ص^2 لا میں
 (۱۳۱) اگر لا ص^2 لا کی ہو تو امتحان کرنا مساوات مرقومہ بالا کچھ ضرور
 کیونکہ اس صورت میں لا ص^2 لا اصل محور ہو جائیگا لیکن اب ہم دیکھیں گے کہ آیا اور
 بھی محور ہو سکتے ہیں یا نہیں اس لیے فرض کر دو کہ $\text{لا}^2 = 90$ ر^2 جس^2 لا^2
 جم اور $\text{جم}^2 =$ جس لا اب صورت مساوات (۱) کی جس سے شرط لا اور ر کی

معلوم ہوتی ہی یہ ہو جاو گی (ط^۲ - ص^۲) جس رجم = ۰ اور چونکہ بیضوی
 میں ط^۲ = ص^۲ کے نہیں ہو سکتا ہی اسلئے مساوت گذشتہ میں فرض کرے
 کہ ر = ۰ یا ر = ۹۰ ان دونوں قسموں کے دیکھتے اصل محور حاصل ہے
 یہاں سی ثابت ہوا کہ صرف اس قسم کی افکار محوری ہو سکتی ہیں یہ بات نہایت
 (۱۷۷) کی ہی ہمیں اگرچہ تبدیلی بالا میں دو مقدار میں غیر مقررہ ہے اور ر کے
 داخل کسی ہیں لیکن ہم دو جز مساوت کی دو نہیں کہتے الا اویس صورتیں کچھ غیر
 دو مقدار کی ممکن ہوں مثلاً اگر چاہیں ہم



دور کرنا کسی جز مساوت کا

جیسا کہ مان لو کہ دور کیا

ہمیں دوسرا جز مساوت کا تو

ہمیں حاصل ہو گا یہ ر = $\frac{ص}{ط} = ۱$

یہ ایک ایسی قیمت ہے جو کہ ناممکن ہے یہاں سی ظاہر ہوا کہ لاؤ = ۰ ہمیں ایک فرض ممکن اختیار کیا

(۱۳۳) مساوت خط منحنی کے یہ ہے { ط^۲ (جس ر) + ص^۲ (جسم ر) } = ۰

+ { ط^۲ (جس ر) + ص^۲ (جسم ر) } = لاؤ = ۰ اگرچہ فرض کو ہم نے ہی درج

ر = ۰ اور لاؤ = ۰ تو ہمیں دریافت ہو گی وہ فاصلہ جو کہ نقطہ شروع سے

دوسرے نقطہ تک ہی جہاں کہ خط منحنی محور کو قطع کرتا ہی اور تعبیر کر دین فاصلہ

کھوٹا اور ص^۲ اسی اول مقدار میں سے فرض کر دے کہ محور لاؤ پر شمار کی

گئی ہے اور دوسری محور ر پر اب اگر اصل محل کو جاری کریں ہم تو ۰ = ۰

$$تو ۰ = \{ ط^۲ (جس ر) + ص^۲ (جم ر) \} ط^۲ = ط^۲ ص^۲$$

$$اور اگر لا = ۰ = \{ ط^۲ (جس ر) + ص^۲ (جم ر) \} ط^۲ = ط^۲ ص^۲$$

$$اسی طرح ط^۲ (جس ر) + ص^۲ (جم ر) = \frac{ط^۲ ص^۲}{ط^۲}$$

اور ط^۲ (جس ر) + ص^۲ (جم ر) = \frac{ط^۲ ص^۲}{ط^۲}

$$کوساوت گذشتہ میں تو حاصل ہوگا یہ ط^۲ ص^۲ + ط^۲ ص^۲ = ط^۲ ص^۲$$

$$یا ص^۲ + ط^۲ = ط^۲ ص^۲ + ص^۲ = ط^۲ ص^۲$$

نتیجہ اس قدر نکلا ط اور ۲ ص ایسی - - - - -
(۱۳۲) تبدیلی مرقومہ بالا سی تین مساواتیں مرقومہ ذیل حاصل ہوئی

$$ط^۲ (ط^۲ جس ر) + ص^۲ (جم ر) = ط^۲ ص^۲ \dots (۱)$$

$$ص^۲ (ط^۲ جس ر) + ص^۲ (جم ر) = ط^۲ ص^۲ \dots (۲)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ط^۲ جس ر جس ر + جس ر جم ر = ۰ \\ یا جس ر جس ر = - \frac{ط^۲ ص^۲}{ط^۲} \end{array} \right. \dots (۳)$$

جبکہ لکھا مہنی ۱- جس ر بجای جم ر کے مساوت (۱) میں تو حاصل ہوگا یہ

$$ط^۲ (ط^۲ - ص^۲) جس ر = ط^۲ ص^۲ - ط^۲ ص^۲ اور ط^۲ (ط^۲ - ص^۲) جم ر$$

$$= ط^۲ ط^۲ - ط^۲ ص^۲ اور تقسیم کرنی سی مساوات اولی کو دوم پر پڑھنا حاصل ہوتا ہے$$

$$مس^۲ = \frac{ط^۲ - ط^۲}{ط^۲ - ط^۲} اسی طرح مساوت (۲) سی حاصل ہوگا یہ$$

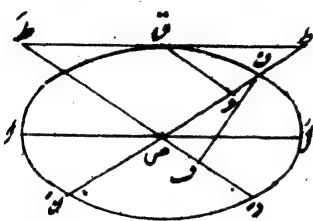
$$مس^۲ = \frac{ط^۲ - ط^۲}{ط^۲ - ط^۲} ضرب دینی سی ان دونوں مساواتوں کو$$

$$حاصل ہوتا ہے مس^۲ مس^۲ = \frac{ط^۲ - ط^۲}{ط^۲ - ط^۲} = \frac{ط^۲ - ط^۲}{ط^۲ - ط^۲}$$

کیونکہ مساوت (۳) سی سر ۲ سر ۲ = $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ یا $\frac{ص^۲}{ط^۲}$ (ط-۲) (ط-۲) (ط-۲)
 = (ط-۲) (ص-۲) (ص-۲) یا $ط^۲ - ط^۲ ص - ط^۲ ص + ط^۲ ص + ط^۲ ص - ط^۲ ص$
 = $ط^۲ ص - ط^۲ ص - ط^۲ ص + ط^۲ ص + ط^۲ ص - ط^۲ ص$: $ط^۲ - ص^۲ = ط^۲ ص$
 + $ط^۲ ط - ط^۲ ص - ص^۲ ص = ط^۲ (ط + ص) - ص^۲ (ط + ص) = (ط + ص) (ط^۲ - ص^۲)$
 = $(ط - ص) (ط + ص) (ط + ص)$: $ط + ص = ط^۲ ص$ یعنی مجموعہ مربعوں
 کا افتخار متجانس کا برابر ہے مجموعہ مربعوں کو جو کرنا بی جا دین بخوردن پر یہ ایک شکل
 بیضوی کے بہت مشہور ہے۔
 (۱۳۵) اگر ضرب کریں ہم مساوت (۱) کو (۲) سی اور اس حاصل ضرب میں
 تفریق کر دے مجذور (۳) مساوت کو تو $ط^۲ ص - ط^۲ ص$ { $ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس)$
 + $ص^۲ (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس)$
 = $ط^۲ ص$ اور مجذور (۳) سی یہ حاصل ہوتا ہے $ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس)$
 + $ص^۲ (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس)$ جبکہ تفریق کیا
 ہمیں مساوت اول میں سے دویم کو تو $ط^۲ ص - ط^۲ ص$ { $ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس)$
 - $ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس)$ یا
 $ط^۲ ص - ط^۲ ص$ { $ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس) + ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس)$
 = $ط^۲ ص$ اور جذ لینی سے دونوں طرف اس مساوت کی یہ حاصل ہوتا ہے
 $ط^۲ ص (جس) - ط^۲ ص (جس) = ط^۲ ص$ اب ظاہر ہے کہ (۲-۲) مساوی زوجہ بن ص
 کے ہی جو کہ واقعہ درمیان قطر متجانس ص ن اور ص د کی ہر اگر ہم کہیں

ایسی خطوط سے دن قطر متبی لنس کیسی جو کہ متوازی انہیں قطر دینی ہوں تو مساوی
گذشتہ سی ثابت ہوگا کہ متوازی الاضلاع n ص د ط = سطح اص ب ی
اسی طور پر ثابت ہو سکتا ہے کہ تمام متوازی الاضلاع گرد کیسی گئے بیضوی گئے
مساوی ہوگی اور سطح کی جو کہ ضرب دینی محور د اور محور کلانی پیدا ہوگی *
اگر تمام اقطار متبی لنس ملائی جا دیں تو ظاہر ہے کہ ایک ایسی متوازی الاضلاع
پیدا ہوگی جو کہ مساوی ہی نصف گرد کیسی گئے متوازی الاضلاع کے ہم آہم آہستہ
سی ہی ط لب علم کو مطلع کر دیتی ہیں کہ بیرونی متوازی الاضلاع چوبلی تمام اون
متوازی الاضلاعوں سے ہوگی جو کہ کیسی جا دیں گرد بیضوی کے اور اندرونی متوازی

بری تمام اون متوازی الاضلاع سی ہیں جو کہ اندر بیضوی کے کبھی جادین
(۱۳۶) اگر ہم رجوع کرین فقرہ (۱۳۳) کی طرف اور دور کرین ثلث نون کو
لا اور دہ پرسی جنگی اب کچھ ضرورت نہیں ہی تو ہمیں حاصل ہوگا



$$\text{ط}^۲ + \text{ص}^۲ = \text{لا}^۲ = \text{ط}^۲ + \text{ص}^۲$$

اس شکل میں ص ن = ط ا اور

ص د = ص ا اور ص د = لا اور

دق = د رکھو سادہ گزشتہ کو

اس صورت میں د = $\frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲} (\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲) = \frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲} (\text{ط}^۲ - \text{لا}^۲) (\text{ط}^۲ + \text{لا}^۲)$
یہاں سی ثابت ہوا کہ مربع اوپر و ترقی د: سطح و اور د: :: مربع ص د: مربع
ص د: $\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}^۲}$ (۱۳۷) سادات ماس کسی نقطہ ق: لا اور د:

کی موافق (۱۱۱) کی یہ ہوگی $\text{ط}^۲ + \text{ص}^۲ = \text{لا}^۲ = \text{ط}^۲ + \text{ص}^۲$ اور نقاط ط
اور ط جہاں کہ یہ ماس کا ستا ہی نہیں محروم کو دریافت ہو سکتی موافق (۱۱۴)
ص ط = $\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}^۲}$ اور ص د = $\frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲}$ اور ماس جو کہ کبھی جادین ابنا مون سی ایک
دتر کی طین کے قطر سے اوس دتر کی موافق فقرہ (۱۱۴) کے $\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}^۲} \times \frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲}$

(۱۳۸) فرض کر دو کہ محور بیضوی کے محور متقاطع علی القوائیم ہیں اور یہ بھی مان لو
کہ دتر نقطہ ن کے لا اور د ہیں تب سادہ ص ن کی یہ ہوگی

$\frac{\text{ط}^۲}{\text{لا}^۲} = \frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲}$ اور سادہ خط ص د کی یہ ہوگی $\text{د} = \text{لا} \times \frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲}$ لیکن
مس د = $\frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲} \times \text{م د}$ موافق (۱۳۴) کی $\text{د} = \frac{\text{ص}^۲}{\text{ط}^۲} \times \text{م د} \times \text{لا}$

= - - ص^۲ لا^۲ یا ط^۲ کو^۲ + ص^۲ لا^۲ = ۰ لیکن مساوت ماس کے
 جو کہ پہنی جاوین نقطہ ن سی یہی ط^۲ کو^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲ بہانی
 ظاہر ہوتا ہے کہ خط ص د جو کہ قطر متجانس ص ن کا ہی متوازی اوس ماس
 کی ہی جو کہ لیجا جاوے نقطہ ن سی اسی سبب ہی اکثر اوقات تعریف قطر متجانس کی
 ہر چہ کرتے ہیں قطر متجانس کے کسی قطر کا ایک ایسا خط کہ مرکز سے گزرتا ہو جاوے متوازی
 اوس ماس کے جو کہ انجام دوسرے قطر کے لیجا گیا ہے مساوت قطر متجانس کے بسبب ہوتی یا دیکھو
 کیونکہ اسکی مساوت اور سارت ماس میں صرف مقدار مقررہ اخیر جز کا فرق ہے
 یعنی مساوت ماس میں ط^۲ ص^۲ پایا جاتا ہے اور اس میں نہیں سیوٹے اسکی
 مساوت بھی خط منحنی سے نکل سکتے ہیں کہ فقرہ (۱۱۱) کے اخیر میں لکھی ہوئی ہے
 تین مساواتیں مذکورہ بالا یہ ہیں ط^۲ کو^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲ خط منحنی کی ہے -
 ط^۲ کو^۲ + ص^۲ لا^۲ = ط^۲ ص^۲ ماس کی ہے قطر متجانس کی ہے -
 مساوت خط د جو کہ گزرتا ہے نقطہ د میں سے جبکہ وتر ص لا اور - ط^۲ ص^۲
 (دیکھو شرح ۱۳۵ کی) اور متوازی خط ص ن کی یہی ہے - ط^۲ ص^۲ =
 لا^۲ + ط^۲ ص^۲ اور بعد از اختصار کرنی کی یہ حاصل ہوگا
 لا^۲ - لا^۲ = ط^۲ ص اور مساوت خط ن ص کی بوجب (۱۳۸) کی یہ ہے
 لا^۲ - لا^۲ = ۰ یہ مساواتیں قطر متجانس اور ماس اور خط منحنی کے بہت فائدہ مند
 پائی جاوین گی حل کرنی میں اون سوالات کی جو کہ متعلق ماسوں کے ہیں -
 (۱۳۹) فرض کرو کہ لا اور د وتر تقاطع علی القوائیم ہیں نقطہ ن کے نسبت

$$ط^۲ + ص^۲ = ط^۲ + ص^۲ = سسی ہمیں حاصل ہو گا یہ ص^۲ = ط^۲ + ص^۲ - ط^۲$$

$$ط^۲ + ص^۲ - لا^۲ - ک^۲ = ط^۲ + ص^۲ - لا^۲ - ک^۲ = ط^۲ + ص^۲ - لا^۲ - ک^۲ = ط^۲ + ص^۲ - لا^۲ - ک^۲$$

$$ط^۲ - سی لا^۲ = (ط - سی لا) (ط + سی لا) = لقی می یعنی مربع اور قطر متجانس$$

ص د = سطح آوردہ ن جو کہ دو نقطہ آتش کے فاصلہ میں ن ن ن ن

(۱۴۰) کیچون ف عمود قطر متجانس ص د برتو اب بموجب فقرہ (۱۳۵) کی سطح

$$ن ف = ص د = ط ص :: ن ف = ط ص = ط ص = ط ص = ط ص = ط ص$$

یہ ثابت کیا گیا (۱۴۱) میں کہ ن گ = ص مانی سی اور

$$ن گ = ص مانی سی یہاں سی صاف ظاہری کہ سطح ن ک اور ن ف =$$

مربع ب ص اور یہی ظاہر ہے ن ک × ن ف = مربع ا ص اور

$$ن ک × ن ک = مربع ص د$$

اوتار التمام کی بیان میں

(۱۴۱) دو خط جو کہ کیچی جاوین ایک نقطہ بیضوی سسی دو انجاسوں ایک قطر

نک اوتار التمام کہلاتی ہیں یہ اوتار التمام کہلاتی ہیں جبکہ وہ قطر محور کلان میں

اب اگر بیضوی محور و ن کو محور اوتار کی فرض کریں تو مان لو کہ ن ن ایک قطر اور ق ن

اور ق ن دو اوتار التمام ہیں پس یہی تین اگر کو وتر نقطہ ن کی اور لا کو وتر ن کی ہوں

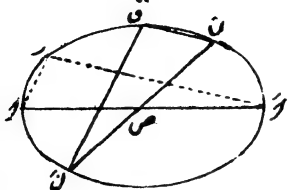
$$تو سادہ ق ن کی یہ ہوگی ک - ک = ۱ (لا - لا) اور سادہ ق ن کی$$

$$یہ ک + ک = ۱ (لا + لا) نقطہ تقاطع ق بر لا اور ک دونوں سادہ$$

کی ایک سسی بن آیدو طے ک - ک = ۱ (لا - لا) لیکن سادہ

بیضوی کے نقطہ ت سر بیسی ط ۲ ص ۲ لا ۲ = ط ۲ ص ۲ اور نقطہ ت پر

$$ط ۲ ص ۲ لا ۲ = ط ۲ ص ۲$$



تفریق کرنی سی یہ حاصل

$$بوگا ۲ - ک ۲ = - \frac{ص ۲}{ط ۲} (لا ۲ - لا ۲)$$

مقابلہ کرنے سی اس مساوت کو مساوات گذشتہ سی حاصل ہوگا بھی

$$11 = - \frac{ص ۲}{ط ۲} \text{ یعنی حاصل ضرب ماسون اون زادیوں کا جو کہ دو اوتار التام}$$

محور کلاں سے بنائی ہیں ساو ایک مقدار مقررہ کی ہے اگر خط منحنی نسبت دو

نقطہ تجانس کے ۲ ط اور ۲ ص ۱ کہی جاوے تو اس صورت میں بھی بطور ثابت

کی ثابت ہوگا کہ ماس اون دوزادیوں کا جو کہ دو اوتار التام کسی محور سی بنا

$$\text{ہیں} = \frac{ص ۲}{ط ۲} \text{ چونکہ مساوات خط ق ت کی یہی ک - ک = ۱ (لا - لا) سیو اعلیٰ مساوت}$$

$$\text{ق ت کی یہ ہوگی ک + ک = -} \frac{ص ۲}{ط ۲} (لا + لا) \text{ لیکن دایرہ میں ص = ط کی ہوتا ہی}$$

۱۱ = - ۱ اسی ثابت ہوتا ہی کہ اوتار التام دایرہ میں عمود ایک دوسرے

پر ہوتی ہیں جو کہ ایک خاصیت مشہور دایرہ کی ہے برعکس اس دعویٰ کے ہر

ثابت ہو سکتا ہے - فرض کر دو کہ ۱ ص ۱ ایک قطری اور ص نقطہ شروع

$$\text{اور } 11 = - \frac{ص ۲}{ط ۲} \text{ تو مساوات خط آ ر کی یہ ہوگی ک = ۱ (لا + ط) ۲}$$

$$(۱) \text{ اور مساوات خط آ ر کی یہ ہوگی ک = ۱ (لا - ط) ۲}$$

$$- \frac{ص ۲}{ط ۲} (لا - ط) ۲ \dots (۲) \text{ اب دریافت کرو نقطہ تقاطع آ ر اور آ ر}$$

کا امداد سے جاری کرنے اس عمل کے مان لو کہ ک اور لا مساوی (۱) اور (۲)

مین ایک سی ہین اور دور کروا کر کو ضرب دینی سے ن آؤ تو ن مساواتوں کے
 تب دے = $\frac{ص ۱}{ط ۲}$ (لا - ط ۲) یا ط ۲ ص ۲ + ص ۲ لا = ط ۲ ص ۲ یہاں سی
 ثابت ہوا کہ لو کہ نقطہ ر کا بیضوی ہر جس کے محور ط ۲ اور ص ۲ ہین ن
 (۱۴۲) مساوات ۱ = $\frac{ص ۲}{ط ۲}$ سی معلوم ہوتا ہے کہ ۱۱ ایک سے نہیں دے سکتے
 دوزدوں کے جو کہ کہی جی جاوین ایک ہی قطر کے انجام تک بلکہ ۱۱ ایک ہی ہین
 دے اسی تمام دوتاں التام کے جو کہ کہی جی جاوین نقطہ بیضوی سی کسی قطر کے دو انجاموں
 تک یہاں سی ظاہر ہوتا ہے کہ اگر ہم کہی جی خط اور کا انجام محور کلاں سے متوازی
 ق ن کی تو دوتاں التام اور کا متوازی قطر ق ن کے ہوگا یہ ممکن ہے تمام صورتوں
 مین آج جبکہ ایک وتر عمود ہوتا متوازی محور کلاں کے ہو - ن ن ن

(۱۴۳) دریافت کرد زاویہ درمیان دو دوتاں التام کے - فرض کرو کہ لا

اور وتر نقطہ ق کی ہین اور لا وتر نقطہ ن کے تو سن ق ن = $\frac{1-1}{1+1}$

$$یا \quad \frac{لا - لا}{لا - لا} = \frac{ط ۲}{ط ۲} = \frac{ص ۲ + ص ۲}{لا + لا} = \frac{ص ۲ - ص ۲}{لا - لا}$$

= $\frac{ص ۲}{ط ۲}$ لا - لا = لا - لا وتر التام اعظم کی صورت مین لا = ط اور

ن = ۰ مس ۱ = $\frac{ص ۲}{ط ۲}$ جو کہ یہ قیمت ماس کے منفی ہر

ہیہ سب سے معلوم ہوتا ہے کہ زاویہ اور آہستہ منفرج ہوتا ہے اور یہ ظاہر ہے
 کیونکہ تمام نقطہ بیضوی کے اذراوس دایرہ کی ہیں جو کہ اگر بیضوی کی کہی
 جاوے میسکہ قیمت تو کی بڑھتی ہی دلیس ہی عددی قیمت ماس کی گہتی ہی با

یا زاویہ بڑھتا ہی (کیونکہ جتنا زاویہ مفروضہ زیادہ ہوتا ہی اتنا ہی اوسکا محاس
چوٹا ہوتا ہی) یہاں سی ثابت ہوگا کہ زاویہ نہایت بڑا اوسوقت ہوگا جبکہ $r = ص$
اور معلوم ہوگا کہ زاویہ 1 اب 1 جو کہ بائیں اوتار التمام اعظم کے واقع ہی بڑی بڑا ہی
اور اوسکی تالی ب 1 نہایت کم ہی اور چونکہ ان دونوں زاویوں میں سے پہلا بڑا
تایمہ سی اور دوسرا چوٹا تایمہ سی اسیوٹے ہم ایسی اوتار التمام کہج سکتے ہیں جنکا
بائیں ایک زاویہ برابر زاویہ مفروضہ کے اور واقع حدود مذکور میں ہوگا اور یہ کہ سید
کو بھنی ایک ایسی قطع دایرہ کی بن سکتا ہے جس میں ایک زاویہ مفروضہ واقع ہوگا
اور کسی ایک قطر کی سوای محور کے اور بذریعہ طائی خطوط کی اوس نقطہ میں جہاں دایرہ
قطع کرتا ہی بیضوی کو اور دونوں انجام قطر میں جس زاویہ کہ درمیان ان خطوط
کی ہی وہ مساوی زاویہ مفروضہ کے ہوگا اور قیمت زاویہ $ن ق ن$ سی دریافت ہوتا
ہی کہ اگر یہ زاویہ قائمہ ہو تو وہ اوتار التمام عمود محور ان پر ہوگی۔ $ن ق ن$
(۱۴۴) صورت (۱۴۱) میں ہمیں ثبوت ثابت کیا ہی کہ مس رس $r =$
 $\frac{ص}{ط}$ اور صورت حال میں ثابت ہوا ہی کہ $11 = \frac{ص}{ط}$ اسیوٹے
مس رس $r = 11$ اگر مس $r = 1$ تو مس $r = 1$ یا اگر ایک قطر متوازی
کسی وتر کی ہو تو قطر متجانس اوسکا متوازی وتر التمام کے ہوگا۔ $ن ق ن$
(۱۴۵) چونکہ ایسی اوتار التمام درمیان ایک خاص حد کی کہج سکتے ہیں جنکی ہیج میں
ایک زاویہ مفروضہ ہو تو قطر متجانس ہی متوازی ان دندوں کے درمیان دیسی ہی
حد کی ایسی کہجی جاوین گے جنکی بائیں وہی زاویہ مفروضہ با یا جاو گیا اور چونکہ زاویہ

دو دائرہ التماس اعظم کے بیچ میں ہمیشہ زاویہ منفرجہ ہوتا ہے اس لیے اسے زاویہ کٹ ص د
 جو کہ درمیان قطر متجانس کے ہی منفرجہ ہوگا اور یہ بڑی سے بڑا ہوگا جبکہ وہ قطار
 متوازی آہ اور اس کے ہونگے اس صورت میں چونکہ یہ دو دائرہ دونوں محورون
 کی نسبت سے ایک ہی طرح پر واقع ہوتی ہیں تو اب وہ آپس میں برابر ہی ہوں گے
 اور مقدار مساوی افتخار متجانس کے معلوم ہو سکتی ہے اس مساوت سے

$$\text{ط} + \text{ص} = \text{ط} + \text{ص} = \text{ط} + \text{ص} = \text{ط} + \text{ص}$$
 اور مساوی افتخار متجانس
 کی لحاظ سے مساوت بیضوی کی یہ ہوتی ہے کہ $\text{ط} + \text{ص} = \text{ط} + \text{ص}$ لیکن ط با سلم کو یہ
 یاد رہی کہ اس مساوت اور مساوت دایرہ کو ایک ہی نہ سمجھا جائے اور یہ مساوت
 دایرہ کی اس وقت ہوگی جبکہ اس کی محور متقاطع علی القوائیم ہونگی۔

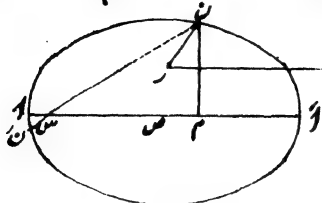
قطب مساواتوں کے بیامین

(۱۳۶) ایک مساوت کو (جو کہ درمیان محورون متقاطع علی القوائیم کی ہے)
 ہم بدل سکتے ہیں درمیان قطبی و مترون اور وہ کے فرض کر دو کہ اس شکل میں ص
 نقطہ سنہ و ع ہے اور اس کی محور متقاطع علی القوائیم ہیں اور مان لو کہ وتر نقطہ قطب
 و کی لا تو ہیں اور وہ زاویہ ہے جو کہ نصف قطر متحرک و ع یا ع بناتا ہے
 خط و لا سے جو کہ متوازی محور لا کی ہے تو موافق (۶۱) یاد کیجئے شکل کی سی
 ط ہر ہوگا کہ $\text{ط} + \text{ص} = \text{ط} + \text{ص}$

$$\text{ط} + \text{ص} = \text{ط} + \text{ص}$$

اور $\text{ط} + \text{ص} = \text{ط} + \text{ص}$ اور جبکہ کہیں نہیں قیمتین لا اور لا کی اس مساوت

مین تو حاصل ہوگا یہہ $\text{ط}^2 = (\text{و} + \text{ع جسر})^2 + \text{ص}^2 = (\text{لا} + \text{ع جمر})^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$



اس مساوات کے پسیدہ سی قیمت
ع کی نسبت ر اور مقادیر مقررہ کے
معلوم ہو جاوے گی۔

(۱۴۷) فرض کرو کہ مرکز نقطہ قطبی ہے: $\text{لا} = ۰$ لہذا $\text{و} = ۰$ $\text{ط}^2 = (\text{ع جسر})^2$

$$+ \text{ص}^2 = (\text{ع جمر})^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2 \quad \text{ع}^2 = \frac{\text{ط}^2 \text{جسر}^2 + \text{ص}^2 \text{جمر}^2}{\text{ط}^2 \text{ص}^2}$$

(۱۴۸) فرض کرو کہ نقطہ آتشی سے نقطہ قطبی ہی بیان $\text{و} = ۰$ اور $\text{لا} = -\text{طی}$

$= -\text{س}$ اور ع اس صورت میں ہی ہو جاوے گا اس وقت صورت مساوت

$$(۱۴۷) \text{ کے یہ ہوگی } \text{ط}^2 = (\text{لی جسر})^2 + \text{ص}^2 = (\text{س} + \text{لی جمر})^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$$

$$\therefore \text{ط}^2 \text{لی}^2 \text{جسر}^2 + \text{ص}^2 \text{لی}^2 \text{جمر}^2 - ۲ \text{ص}^2 \text{لی}^2 \text{س جمر} + \text{ص}^2 \text{س}^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$$

$$\text{یعنی } \text{ط}^2 \text{لی}^2 \text{جسر}^2 + \text{ط}^2 \text{لی}^2 \text{جمر}^2 - ۲ \text{ص}^2 \text{لی}^2 \text{س جمر} + \text{ص}^2 \text{س}^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$$

$$\text{ط}^2 \text{ص}^2 - \text{ص}^2 \text{س}^2 = \text{ص}^2 \text{کیونکہ } \text{ط}^2 - \text{ص}^2 = \text{س}^2 \text{ یا } \text{ط}^2 \text{لی}^2 = \text{س}^2 \text{لی}^2 \text{جمر}^2$$

$$+ \text{ص}^2 \text{لی}^2 \text{س جمر} + \text{ص}^2 = (\text{س} + \text{لی جمر} + \text{ص}^2) \therefore \text{ط}^2 \text{لی}^2 = \text{س}^2 \text{لی}^2 \text{جمر} + \text{ص}^2$$

$$\text{اور نق} = \text{ط} - \text{س جمر} = \frac{\text{ط}^2 (۱ - \text{لی}^2)}{\text{ط} - \text{طی جمر}} = \frac{\text{ط} (۱ - \text{لی}^2)}{۱ - \text{لی جمر}} \quad \text{نہ نہ غ}$$

(۱۴۹) فرض کرو کہ کوئی نقطہ محیط بیضوی پر نقطہ قطبی ہے اور جو وقت پہلا یعنی

مساوت (۱۴۷) کو اور تختہ لیا گیا کو سی بوسیلہ مساوت $\text{ط}^2 = (\text{و} + \text{ع جسر})^2 + \text{ص}^2 = \text{ط}^2 \text{ص}^2$

تو حاصل ہوگا یہہ $\text{ع} = -\frac{\text{ط}^2 \text{و جسر} + \text{ص}^2 \text{لا جمر}}{\text{ط}^2 \text{جسر}^2 + \text{ص}^2 \text{جمر}^2}$ اگر قطب نقطہ آکا فرض

کیا جاوے تو $\frac{1}{2} = 0$ اور لا = ط - ع = ط + جس پر ص ۲ جم ۲ ر جبت
 (۱۵۰) اگر نقطہ آتش قطبہ فرض کیا جاوے تو اکثر سادات کائناتی بنیں بوسیدہ چرخیا
 معلوم بیضوی کشنی مان لو کہ خط سن = تی لور ص م = لا اور زاویہ

۱ سن = ۲۰ سن تو سن = ط + ی لا (۱۰۹) = ط + ی (سم-سم)

$$= ط + ی (-) ی جمر - ط ی$$

$$نق = ط (۱۰ ی) + ی جمر$$
 یہ مساوت اکثر علم ہیئت میں کام آتی ہے جہاں نقطہ
 اس مقام آفتاب کا اور بیضوی تقریبی رستہ سیارہ کا فرض کیا جاتا ہے۔

فرض کرد که $\frac{V_2}{V_1} = (1 - \gamma) = 1$ موافق صورت (۱۰۵) توازن ساده است

گزشتہ کی یہ صورت ہو جاوے گی کہ $\frac{p}{p} = \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+y} = \frac{1}{1+y}$

$$\frac{1}{2} = \frac{(1+1)(1+\frac{1}{2}) + (1-1)(1-\frac{1}{2})}{2}$$

پہلے کہیں نہ کہیں بلکہ ایک خط سہی جو کہ گزرتا ہی لفظ سے پہتا ہوا ایک راویہ ۱

خود سے آتے تو صورت قطعی مساوات کی یہی موجودگی ہے = $\frac{1}{p}$ اور $\frac{1}{q}$ (۱-۱)

(۱۵۱) الرخطان سے پہلے خط مسخ سے لفظ ان پر نو سن = سو نو

مثلاً $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{9}{14}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{11} = \frac{12}{22}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{13} = \frac{15}{26}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{14} = \frac{7}{10}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} = \frac{17}{30}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{17} = \frac{18}{34}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{19}{36}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{19} = \frac{20}{38}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{20} = \frac{11}{20}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{21} = \frac{23}{42}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{22} = \frac{23}{44}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{23} = \frac{24}{46}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{24} = \frac{13}{24}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{25} = \frac{26}{50}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{26} = \frac{13}{26}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{27} = \frac{28}{54}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{28} = \frac{14}{28}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{29} = \frac{30}{58}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{30} = \frac{16}{30}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{31} = \frac{32}{62}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{32} = \frac{17}{32}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{33} = \frac{34}{66}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{34} = \frac{17}{34}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{35} = \frac{36}{70}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{36} = \frac{19}{36}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{37} = \frac{38}{74}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{38} = \frac{19}{38}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{39} = \frac{40}{78}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{40} = \frac{21}{40}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{41} = \frac{42}{82}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{42} = \frac{21}{42}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{43} = \frac{44}{86}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{44} = \frac{22}{44}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{45} = \frac{46}{90}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{46} = \frac{23}{46}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{47} = \frac{48}{94}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{48} = \frac{25}{48}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{49} = \frac{50}{98}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{50} = \frac{26}{50}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{51} = \frac{52}{102}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{52} = \frac{26}{52}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{53} = \frac{54}{106}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{54} = \frac{27}{54}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{55} = \frac{56}{110}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{56} = \frac{28}{56}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{57} = \frac{58}{114}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{58} = \frac{29}{58}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{59} = \frac{60}{118}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{60} = \frac{31}{60}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{61} = \frac{62}{122}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{62} = \frac{31}{62}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{63} = \frac{64}{126}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{64} = \frac{33}{64}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{65} = \frac{66}{130}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{66} = \frac{33}{66}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{67} = \frac{68}{134}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{68} = \frac{34}{68}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{69} = \frac{70}{138}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{70} = \frac{35}{70}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{71} = \frac{72}{142}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{72} = \frac{37}{72}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{73} = \frac{74}{146}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{74} = \frac{37}{74}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{75} = \frac{76}{150}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{76} = \frac{38}{76}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{77} = \frac{78}{154}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{78} = \frac{39}{78}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{79} = \frac{80}{158}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{80} = \frac{41}{80}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{81} = \frac{82}{162}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{82} = \frac{41}{82}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{83} = \frac{84}{166}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{84} = \frac{42}{84}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{85} = \frac{86}{170}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{86} = \frac{43}{86}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{87} = \frac{88}{174}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{88} = \frac{44}{88}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{89} = \frac{90}{178}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{90} = \frac{45}{90}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{91} = \frac{92}{182}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{92} = \frac{46}{92}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{93} = \frac{94}{186}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{94} = \frac{47}{94}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{95} = \frac{96}{190}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{96} = \frac{48}{96}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{97} = \frac{98}{194}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{98} = \frac{49}{98}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{99} = \frac{100}{198}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{100} = \frac{50}{100}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{101} = \frac{102}{202}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{102} = \frac{51}{102}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{103} = \frac{104}{206}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{104} = \frac{52}{104}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{105} = \frac{106}{210}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{106} = \frac{53}{106}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{107} = \frac{108}{214}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{108} = \frac{54}{108}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{109} = \frac{110}{218}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{110} = \frac{55}{110}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{111} = \frac{112}{222}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{112} = \frac{56}{112}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{113} = \frac{114}{226}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{114} = \frac{57}{114}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{115} = \frac{116}{230}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{116} = \frac{58}{116}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{117} = \frac{118}{234}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{118} = \frac{59}{118}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{119} = \frac{120}{238}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{120} = \frac{61}{120}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{121} = \frac{122}{242}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{122} = \frac{61}{122}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{123} = \frac{124}{246}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{124} = \frac{62}{124}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{125} = \frac{126}{250}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{126} = \frac{63}{126}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{127} = \frac{128}{254}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{128} = \frac{64}{128}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{129} = \frac{130}{258}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{130} = \frac{65}{130}$ اور $\frac{1}{2} + \frac{1}{131} = \frac{132}{262}$ اور $\frac{1}{2$

۱۔ ی + ل = یل (یہ) اور یقیناً = ی + ل = یل

۱- (ی ج ۲) = $\frac{۲}{۳}$ (ی + ی) با سطح سن اور سن

۴۔ حج و عمرہ کی احکام اور بیس درجہ جو ایک عہدہ ایسی ہے کہ

1000-0000-0000-0000

ماجر

فقہ (۱۳۵) ص ۱ = $\frac{ط - (۱-۱)}{ط - ۱} = \frac{ط}{ط - ۱}$

نق + نق' = $\frac{ص_۲}{ط}$ یا نق + نق' = $\frac{ص_۲}{ط}$ یعنی $ط (نق + نق') = ص_۲$

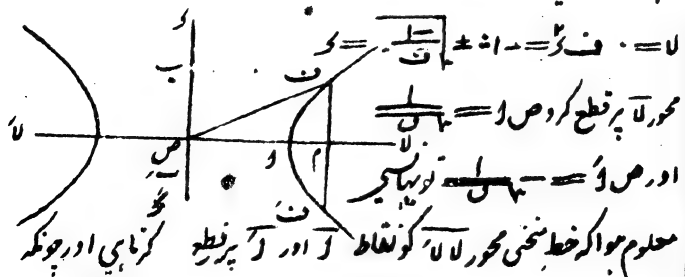
— $ص_۲ : ط :: (نق + نق')$ —

✦ باب ✦

بعد البضوی کے بیان میں

(۱۵۳) بحث مساوات عام درجہ دوم میں۔ ہم ثابت کر آئی ہیں کہ اگر ایک مساوات جسکا
خط منحنی محور تقاطع علی القوایم اور مرکز نقطہ شروع رکھتا ہو تو شکل مساوات عام کی
صورت بعید انبضوی میں یہ ہو جاتی ہے $(\frac{x^2}{a^2}) + (\frac{y^2}{b^2}) - 1 = 0$ یا $a^2 - b^2 = 1$ بیان
اشمال مختلف علامتیں رکھتی ہیں (۸۵) اور (۸۶) فرض کرو کہ $(\frac{x^2}{a^2}) - (\frac{y^2}{b^2}) - 1 = 0$ منحنی ہی ایسا
صورت مساوات کی یہ ہو جاوے گی $(\frac{x^2}{a^2}) - (\frac{y^2}{b^2}) - 1 = 0$ یا $a^2 - b^2 = 1$

فرض لا = ۱۔ ہم اب ثابت کریں گی بوسیله اس کی تمام اشکال بعید البصوی کو
(۱۵۴) فرض کرو کہ مرکز خط منحنی کا ص ہی اور لا لا اور کو اس کی محور متقاطع علی
نقطہ ص یعنی میں فرض کرو کہ ص م = لا اور م ف = و ایسا سطحی ان نقاط پر
جہاں کہ خط منحنی قطع کرتا ہے محور و کو ۰ = لا = ۱ = لا = ۱ = ۱



اور چونکہ قیمت کو کی ناممکن ہے تو معلوم ہوا کہ دوسرا محور خط منحنی سے نہیں ملتا
ہی یہی ہم محور کو نقاط ب اور ب پر نشان کرتے ہیں جسکی فاصلے

$$\text{نقطہ ص سے ص ب} = \frac{1}{2} \text{ اور ص ب} = \frac{1}{2} \text{ ماف}$$

$$\text{اور اگر ص} = 1 \text{ ط اور ص ب} = \text{ص کی فرض کیا جادی تو ق} = \frac{1}{2}$$

اور ف = ص اسبواسطی صورت مساوات کی یہ ہو جاوے گی

$$\frac{2}{3} \text{ ص} = \frac{2}{3} \text{ ط} - 1 = \frac{2}{3} \text{ ط} - 1$$

$$\text{یا ط} = 2 - \text{ص} \text{ لا} = \text{ص} - \text{ط}$$

$$\text{یا کو} = \frac{\text{ص}}{2} (2 - \text{ط})$$

(۱۵۵) پچھلی مساوات سے ہمیں حاصل ہوتا ہے یہ

$$\text{کو} = \pm \frac{\text{ص}}{2} (2 - \text{ط}) \text{ (۱)}$$

$$\text{اور لا} = \pm \frac{\text{ط}}{2} (2 + \text{کو}) \text{ (۲)}$$

(۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر لا کم ہو $\pm \text{ط}$ سے تو کو ناممکن ہوگا اب اگر خط

نقاط آ اور آ سے متوازی خط ص کو کی کینچیں جا دیں تو کو ہی حصہ خط

کا درمیان ان خطوط کے نہیں واقع ہوگا اور واسطی ہر ایک قسمی

لا کی جو کہ ط سے زیادہ ہو دو صیح مساوی قیمتیں کو کی حاصل ہوتی

یعنی واسطی ہر ایک قدر العرض ص م کی دو وتر م ف اور م ف

ہر مقابل ایک دوسری کی ہیں حاصل ہونگی۔ اور جب کہ قیمت لا

کی ط سے کم زیادہ ہوتی ہے ویسی ہی قیمتیں کو کی سے

اصلی محور نہیں ہوتا ہی۔ اس کتاب میں ہم جبری محور کو محورِ کلان کہیں گی اور
محورِ خود کو محورِ متجانس۔

(۱۵۷) نقاط α اور β کو اس خط منحنی کہتی ہیں اور کوٹا نقطہ ان دو کو
نقطہ شروع ہو سکتا ہے اگر موافق اس کی تبدیلی گئی جاوے تو نقطہ کے نقطہ
شروع ہی اور مان لو کہ $\alpha = \beta$ تو

$$u = v = m = 1 + 1 = 2 \quad \alpha = \beta \quad \frac{v}{u} = \frac{v}{u} \quad (u = \alpha)$$

$$= \frac{v}{u} = \frac{v}{u} = \frac{v}{u} = \frac{v}{u} \quad (u = \alpha) \quad \text{اور علامتوں کو دور}$$

$$\text{کر لی سی یہ حاصل ہو گا } \frac{v}{u} = \frac{v}{u} = \frac{v}{u} \quad (u = \alpha)$$

اور یہ مساوات بطور ہندسہ کی اس طرح پر تعبیر ہو سکتی ہے۔

مربع m : مسطح α اور β :: مربع v : مربع u ۔ اگر نقطہ شروع α

$$\text{رض کیا جاوے تو صورت مساوات کی یہ ہو گے } \frac{v}{u} = \frac{v}{u} \quad (u = \alpha)$$

(۱۵۸) اگر $\alpha = \beta$ تو صورت مساوات بعد البعضو کی یہ ہو گئی $\frac{v}{u} = \frac{v}{u}$ ۔

خط منحنی کو بعد البعضو کی مساوی اقطار کہتی ہیں یہ دہی نسبت خط بعد البعضو کی عام سی کتابی جو کہ

(۱۵۹) درساں خط بعد البعضو کی یہاں فرق ہی کیونکہ ان کی مساوی ہیں فرق صرف علامت

ص α میں ہی کیونکہ اگر مساوی بعضو میں جو کہ یہی $\alpha = \beta$ = خاص بجای

+ ص α کی۔ ص α کہا جاوے تو میں مساوی بعد البعضو کی حاصل ہو گئی یہاں معلوم

ہو اگر کہیں جو کہ بعضو میں ثابت گئی ہیں اس طرح اس میں بھی ثابت ہو سکتے ہیں اگر کسی

ص α کی۔ ص α کہا جاوے اسو اس میں بھی ثابت ہو سکتا ہے لیکن صرف ان کی دہی

اور چونکہ ان کی دہی اشارہ کر کے اس کی متعلقہ طرٹ اس کی خاص شکل بعضو کی اوجہ ان کے

ضرورت ہوگی اسکو ہم بیان حل کرین گی اور جس بیانیہ کے شکل کے حضرت ہوگی اس کے
مقام پر شکل ہی لکھ دیں گے

نقاط آتشی کے بیان میں

(۱۶۰) مساوت $د = \frac{صا}{ط}$ (۱ ط + ۲ لا) کی یہ صورت ہو سکتی ہے

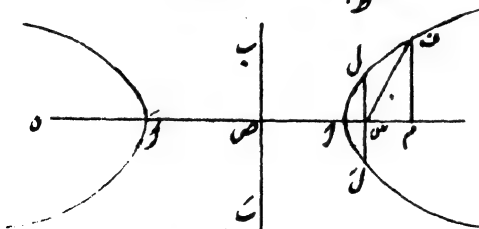
$ل = لا + \frac{ل}{ط}$ جبکہ $ل = \frac{صا}{ط}$ کے فرض کیا جاوے اور اس ل کو
وتر آتشی اعظم کہتے ہیں چونکہ $ل = \frac{صا}{ط} = \frac{صا}{ط}$ تو معلوم ہوا کہ وتر آتشی

اعظم نسبت ثالث رکھتا ہے محور کلان اور محور دسی یعنی

محور کلان : محور خورد :: وتر آتشی اعظم : —
(۱۶۱) دریافت کرو ایک ایسا نقطہ محور کلان پر جس سے ایک ایسا وتر کیا جاوے کہ جو

اوسکا مساوی ہو وتر آتشی اعظم کے اس صورت میں ط برابر ہو کہ $صا = ل$ یا

$$\frac{صا}{ط} = (لا - ط) = \frac{صا}{ط} \quad \therefore لا - ط = ط \quad \therefore لا = ۲ط$$



مثلاً اب کو تو اب = $صا + ط$ اب صا کو مرکز گردانے اور اب کو نصف قطر کہو ایک

پوچھتا ہوا محور کلان کو نقاط سے اور ۵ میں تو اس صورت میں صا = $ط + صا$
اور صا = ۵ — $صا + ط$ تو اب دریافت ہوئے دو نقطے سے اور ۵ کے ایسی

جنین سے اگر ایک وتر مثل ل س ل کے کھینچا جائے تو وہ مساوی وتر آتشی اعظم کے ہوگا نقاط سے اورہ کو نقاط آتشی کہتے ہیں -

(۱۶۲) کسر $\sqrt{ط^۲ + ص^۲}$ کو (جو کہ تعبیر کرتی ہے) دوسرے نسبت کو جو کہ درمیان

ص من اور ص ل کے ہے) خارج المرکز کہتے ہیں اور اگر اوس مقدار کو جو کہ عدد

ایک سی کم ہی سی تعبیر کریں تو ہمیں یہ حاصل ہوگا $ط^۲ + ص^۲ = ط$

اور یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ $ط = \frac{ط^۲ + ص^۲}{ط} = ۱ + \frac{ص^۲}{ط} = ۱ - \frac{ص^۲}{ط}$

تو اب ظاہر ہے کہ مساوات بعید البینوی کو اس صورت میں لکھ سکتے ہیں

$ط = (۱ - \frac{ص^۲}{ط}) (ط - ل)$ -

(۱۶۳) چونکہ $ط + ص = ط^۲$ تو $ص = ط^۲ - ط = ط$

(ط + ط) (ط - ط) یا سطح اس اور اس = مربع ب ص -

(۱۶۴) دریافت کرو فاصلہ کسی نقطہ خط منحنی کا نقطہ آتشی سے -

عمل کر نیسی موافق (۱۰۹) کی ہمیں حاصل ہوگا یہ س ف = ص ل - ط اور

ف = ص ل + ط یہاں سی ثابت ہوتا ہے کہ ف - س = ط = ۲ = ۱

یعنی حاصل تفریق فاصلوں کسی نقطہ خط منحنی کا نقطہ آتشی سے مساوی ہوگا بلکہ

(۱۶۵) برعکس کے دریافت کرو کہ اگر ایک ایسی نقطہ کا فرق جس کے فاصلوں کا

دو قایم نقطوں سے اورہ سی مساوی ایک مقدار مقررہ یا $ط$ کی ہے اگر

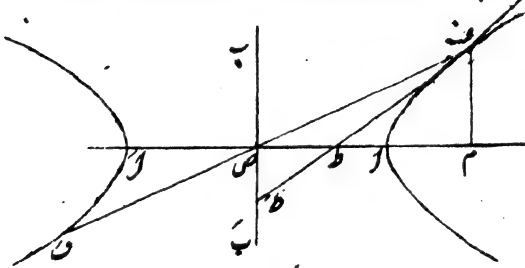
س = ۵ = ۲ تو لو کہ اس ایک ایسا بعید البینوی ہے جس کے محور $ط$ اور

$ط + ص = ۲$ ہیں اور نقاط آتشی اسکے سے اورہ ہمیں موافق (۱۱۰) کی

ماس کے بیان

(۱۶۶) دریافت کرو مساوات ماس کی جو کہ کہنیا جاوے نقطہ ف (لا اور کو)

خط منحنی سے مساوات ماس کے عمل کرنی سی موافق (۱۱۱) حاصل ہوگی
 ط کو - ص لا = ط ص یہ صورت بخوبی یاد ہو سکتے ہیں کیونکہ یہ مساوات
 حاصل ہوتی ہے مساوات خط منحنی سے ط کو - ص لا = ط ص بوسیہ کہنیا



کو کی بجای کو اور لا لا بجای لا کے — — — — —

(۱۶۷) دریافت کرو وہ نقاط جہاں کہ ماس قطع کرتا ہے محور کو کو فرض کرو

۰ = لا = ط کو = ص ط اسیر حسی د = ص ط = ص لا = ص کو

ہیں حاصل ہوگا سطح ص ط اور ص م = مربع ص

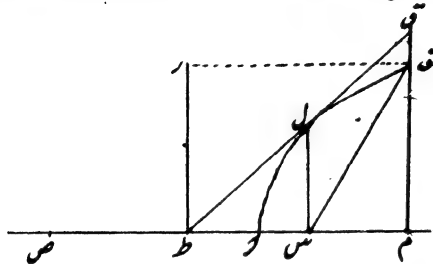
اور سطح ص ط م ف = مربع ب ص اور چونکہ ص ط = (ط کو) ہمیشہ کم ہوتا ہے

ص کو سی تو معلوم ہوا کہ ماس کسی نقطہ شاخ ف کو کا قطع کرتا ہے محور کلاں کو

درمیان ص اور آ کے اور خط پائیں م ط = لا - ط کو = ط کو (۱۱۵)

اور ماس نقطہ آ پر جو کہ انجام محور کلاں کے ہی عمود محور کلاں پر ہوگا موافق (۱۱۶)

(۱۶۸) دریافت کرد مساوت مماس کی انجام دتر آتش اعظم پر
مساوت عام مماس کے یہ ہر ط^۲ کو - ص^۲ لا = - ط^۲ ص اور نقطہ آں پر
لا = ط ی اور ک = ط^۲ ص : ط^۲ کو - ص^۲ لا ط ی = - ط^۲ ص



یا و = ی لا - ط
فرض کرو کہ وتر و یا
م ق قطع کرتا ہی خط
منحنی کو نقطہ ف پر

تو س ف = ی لا - ط (۱۶۳) : م ق = س ف اور
ص ط = ط اب کہیں جو نقطہ ط سی عمود ط آں ص پر اور ف سی ف رستواری
م ط کے تو ط م = و ر = م ص - ط ص = لا - ط = ی لا - ط = ی
س ف یہاں سی دریافت ہوا کہ فیصلے کسی نقطہ ف کے س سی اور خط ط سے
اس نسبت میں ہونگے ی : خط ط کو خط بنیادی کہتی ہیں اگر لا = ۰

تو و = - ط یہاں سی معلوم ہوا کہ مماس انجام دتر آتش اعظم پر کاشا سی محور کو
کو اوس نقطہ پر جہاں کہ دایرہ کہیں چکیا محور کلاں پر قطع کرتا ہی اوسی محور کو -

(۱۶۹) دریافت کرد طول اوس عمود کا جو کہ کہیں چا جہ نقطہ آتشی سے مماس
فرض کرو کہ س و اور ر عمود مماس ف ط پر ہیں موافق صورت (۴۱) کے

ہیں حاصل ہوگا یہ ع = $\frac{س - لا - د}{ما + ط}$ یہاں ک = ۰ اور
لا = ط ی اور نقطہ س کے ہیں اور ک = ع لا + مساوت خط ف کی

مسادات ماس کی اوسنی نقطہ ف پر یہ ہوگی ط^۲ کو - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲
 اور مساوت سے کو کی یہی = $\frac{-ط^۲}{ص^۲ لا^۲} (لا - س)$ اور پوسیلہ دور کرنی لا^۲
 اور کو کی بطور (۱۲۰) کے ہمیں حاصل ہوگا یہ ط^۲ = لا^۲ + کو^۲ یہاں سی ثابت ہوا
 کہ خط مطلوب ایسا دائرہ ہے جس کا محور کلان قطر سی۔

(۱۲۱) چاہتی ہیں ہم دریافت کرنا اوس زاویہ کا جو کہ خط سے ف کا ماس
 ف ط سی بناتا ہے۔ ظاہر ہے کہ مساوت ماس کی یہی

$$\begin{aligned} & \frac{ص^۲ لا^۲}{ط^۲ کو^۲} - لا^۲ = \frac{ص^۲}{ط^۲} \text{ اور مساوت خط مستقیم سے ف کی یہی ہے} \\ & - کو^۲ = - لا^۲ - \frac{ص^۲}{ط^۲} (لا - س) \text{ یہاں سی معلوم ہوا کہ مس سے ف ط} \\ & \text{مس (ف مس لا - ف ط لا)} = \frac{لا - س}{ط^۲ کو^۲} - \frac{ص^۲ لا^۲}{ط^۲ کو^۲} \\ & = \frac{1 + \frac{ص^۲ لا^۲}{ط^۲ کو^۲}}{لا - س} \end{aligned}$$

$$= \frac{ط^۲ کو^۲ - ص^۲ لا^۲ + ص^۲ مس لا^۲}{ط^۲ کو^۲ (لا - س)} = \frac{ص^۲ (مس لا - ط^۲)}{ط^۲ کو^۲ (لا - س)}$$

اسی طرح سے ثابت ہوگا کہ مس ہ ف ط = $\frac{ص^۲}{ط^۲ کو^۲}$ اس طرح سے زاویہ سے ف ط برابر
 ہی زاویہ ہ ف ط کی کہیں جو خط سے ف کو سے نکلتا اب واضح ہو کہ یہ ایک بڑی
 خاصیت روشنی کی ہے کہ اگر ایک کرن نقطہ ہ میں سے گزری منعکس ہو خط ط ف ط
 سی تو زاویہ سے ف ط کا مساوی ہوگا زاویہ ہ ف ط کو اور چونکہ بعید البصوت
 میں یہ دونوں زاویہ مساوی ہوتی ہیں تو اب معلوم ہوا کہ اگر ایک لاش جسم نقطہ سے
 پر رکھا جائے تو تمام کرنیں نقطہ سے سے نکل کر منعکس خط منحنی سے ہو کر نقطہ ہ پر
 جمع ہو گئی اسی طرح سے یہ دونوں نقطے نقطہ تفسی کہلاتی ہیں یہ ایک بڑی خاصیت خط

خط معنی کی بطور آئندہ کے بھی ثابت ہو سکتے ہی موافق فقرہ (۱۶۹) کے

س = ع = ص $\sqrt{\frac{ق}{ح}}$ اور ر = ع = ص $\sqrt{\frac{ق}{ح}}$

(۱۷۲) دریافت کرد و طالع نمود و صد کا جو کہ مرکز سے ماس بر کینچا

ظاہری کہ $\frac{15-11.9}{\sqrt{1+1}} = 0.5$ اور ظاہری کہ یہاں $15 = 0$ اور

$$لا = 0 \text{ اور } 1 = \frac{\text{حصہ ۲}}{\text{حصہ ۱}} \text{ اور } 2 = \frac{\text{حصہ ۲}}{\text{حصہ ۳}} \therefore \text{حصہ ۲} = \frac{\text{حصہ ۱}}{2}$$

(۱۷۴) دریافت کرد و کوس و کای غنی ده خط جو که حرکت دسی یاد کو

غیر منقطع فرض کر نیسی یہ اس کو کا ظاہر ہی کہ مساوت ص و کی یہ ہے ص = $\frac{ص}{ص}$

دور کرنی سی لا اور انکو موسید امن سادت کی اور سادت عام میں کے بہ چل

ہو گا یہ $ط^2 لا - ص^2 ز = (لا + ز)^2$ اور اس کی بحث ہم ابھی نہیں کریں گے۔

(۱۷۴) بوسیدہ سادہٴ ماس اور سادہٴ صدف کے ہمیں حاصل ہوگا موقوف

(۱۴۴) کے یہ مس ص ف ط = $\frac{\text{ط}^2 \text{ص}^2}{\text{سر}^2 \text{لا}^2}$ اور چونکہ ص = د = ص جس میں

تو $\frac{\text{طص}}{\text{ص}}$ = طجس ص رد = جس ص رد = $\frac{\text{ص}}{\text{ص}}$ اور چونکہ

اور چونکہ $س = ک + ا$ اور $س = ص$ تو $ص = ک + ا$ متوازی ہر کی ہوگا اور

ص ۱ = $\frac{1}{p}$ اک = $\frac{1}{p}$ (۵۶ - ۵۶) = ص ۱ - (۳) سطح مس، اور

هرگاه = مربع ب ص ظاهر بی که خط ه را قطع کرتا بی دایره کو نقطه د بر او را ملاخدا

صدا کو چونکہ حصار ص کا خط مستقیم اور قطر دایره کا ہر سویہ سطح مثلث ص س ر کا سا دہشت

صہ کے چوکا اور سطح سے دائرہ = سطح و دائرہ = سطح و اور = سطح و اور = اور کے ہی = مربع

بیاض (۴) فرض کرد کہ سن قی = نق اور وقت = طاق و کالی اور س کو = ع اور

۵۔ $E = \text{تقریباً}$ $\frac{1}{2}$ کیونکہ بوسیدہ مشابہتوں کے حصے اصل ہوا کے $\frac{1}{2}$ سے کم ہیں

∴ $\frac{u}{u + b_r} = c$ اور جو کہ ہم نے ثابت کیا کہ $c = \frac{c}{1 + \frac{b_r}{c}}$ ∴ $\frac{u}{u + b_r} = \frac{c}{1 + \frac{b_r}{c}}$

چونکہ ہر = ہن جبرہ فر تو ص ہا $\frac{ص}{ص}$ = ی جبرہ فر :
 جبرہ فر = $\frac{ص}{ص}$: زاویہ ص دو = ہن فر اور ص دو متوازی ہن
 کی ہر اگر ص ہی متوازی ماس خط کی کہینچا جاوے اور وہ قطع کری ہن کو نقطہ
 ی مین تو ف ی = ص د = ر ص — — — — —

عمود ماس کے بیان میں —

سادت اوس خط کی جو کہ گزری نقطہ ف (لا اور د) سی عمود ماس
 (د = $\frac{ص}{ص}$ لا — $\frac{ص}{ص}$) پر یہ ہوگی د — $\frac{ص}{ص}$ — (لا — لا)
 اب دریافت کرو کہ کس جگہ یہ عمود ماس محور کو قطع کرتا ہے واسطی اس بات
 فرض کرو کہ د = ۰ : د — $\frac{ص}{ص}$ — (لا — لا) : لا = لا + $\frac{ص}{ص}$
 $\frac{ط}{ط}$ ص لا = ی لا = ص ک اور اب فرض کرو کہ لا = ۰ :
 د = د + $\frac{ط}{ط}$ ص = $\frac{ط}{ط}$ ص د = $\frac{ط}{ط}$ ص د = ص ک اور ظاہری
 کہ خط بائیں م ک = لا — لا = $\frac{ص}{ط}$ اور س ک = ی س ف :
 (۱۷۶) بوسیلتہ قیمت س ک اور س ک اور م ک کے ہمین حاصل ہوگا
 یہ ف ک = $\frac{ص}{ط}$ م م م اور ف ک = $\frac{ط}{ص}$ م م م اس واسطی سطح
 ف ک اور ف ک = ی م = سطح س ف اور ہ ف کی اور
 س ک = $\frac{ط}{ص}$ م م م اور ک ک = $\frac{ط}{ص}$ م م م : ک ک = ی س ک
 (۱۷۷) چونکہ ماس مساوی زاویہ بنا تا ہی نقطہ آتشی کے فاصلوں تو عمود
 جو کہ عمود ماس پر ہوتا ہے مساوی زاویہ بنا دیکھا نقطہ آتشی کے فاصلوں اگر

۱۵
دہلی ثبوت اس بات کی خطہ مذکورہ کنگ کیسچین تو دعویٰ مذکورہ کنگلی
بطور آئندہ کی بوسیدہ قیمت صدک کی ثابت ہو سکتا ہے۔

سک : دک :: یلا + ط : یلا + ط :: یلا - ط : یلا + ط
 :: سرف : هف :: یهانی معلوم هوا که زادیه سرف دکو خط ف که تنصیف کیا

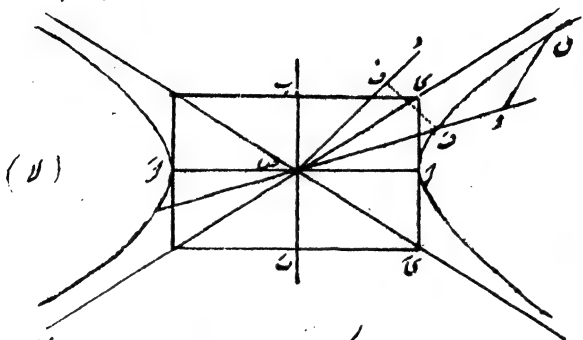
قطرون کے سیاست

(۱۷۸) یہ بات بخوبی ثابت ہو سکتی ہے کہ بیضوی من فقرہ (۱۳۱) میں جو
کہ تمام اقطار بعید البیضوی کے مرکز پرست گذرتی ہیں اور برعکس اسکی جو خط کہ مرکز
پرستی گذریگا وہ قطر ہوگا اگر $\epsilon = \lambda + d$ مساوت وتر کی ہو تو
ط ۱ ص ۱۱ = . مساوت اس قطر کی ہے جو کہ نصف کرتا ہی تمام لون دتر
جو کہ متوازی او من خط مستقیم کے ہیں چکی مساوت ہے $\epsilon = \lambda + d$

(۱۰۹) تمام قطر بیضوی کی خط منحنی سے ملتی ہیں لیکن بعد البیضوی میں ایسا حال نہیں ہوتا ہے اور یہ بات ظاہر ہوگی جو سیدہ دہشت کرنی نقطہ تقاطع قطر اور خط منحنی کے فرض کرو کہ $x = m$ لا مساوات قطر صاف کی ہے لہذا قیمت x کو مساوات خط منحنی میں جو کہ یہ ہے $x^2 - 2x + 1 = 0$ صاف

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اگر $\frac{1}{2}$ برابر ہو $\frac{1}{2}$ سے تو یہ قسمیں لاکر ناممکن
 ہوگی یعنی اگر $\frac{1}{2}$ برابر ہو $\frac{1}{2}$ سے تو یہ قسمیں لاکر ناممکن ہوگی اور اگر
 $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ تو قطر خط معینی سے لایہایت ذاصلہ پر ملی گا حدود اوں قطر کو

جو تقاطع ایک دوسری سے کرتی ہیں اس طرح معلوم ہونے لگی نقاط آ اور ب اور
 بے میں سے کچھ خطوط متوازی محور دیکھی جو کہ ملین نقطوں کی آوری پر توافق
 ہی کہ مس ی ص ۱ = ط اور مس ی ص ۱ = ط بہا سی معلوم ہوا



کہ اگر خطوط ی ص اور ی ص کو لپیچا جاوے تو وہ خطوط مطلوب ہونے لگی بہا سی
 ثابت ہوا کہ اگر قطر خط منحنی سے ملے تو وہ بالضرور زاویہ ی ص کی لپیچا گیا ہوگا
 تو اب معلوم ہوگا کہ خط ص د کبھی خط منحنی سے نہیں ملیگا۔

(۱۸۰) واضح ہو کہ خط بعید البینوی کے لاتعداد انقطاع متجانس ہو سکتے ہیں اور
 یہ ثابت ہو سکتا ہے اگر خط منحنی کے محور دیکھی سمت بوسیلہ (۵۷) کی برلی جلا
 ط بری کہ $د = لا جس ر + د جس ر$ اور $لا = لا جس ر + د جس ر$ جبکہ
 لکھا یعنی ان قیمتوں لا اور د کو اس مساوت میں ط کو $ص لا = د لا$ ۔
 تو حاصل ہوگا یہ $\{ط (جس ر) - ص (جس ر)\} + ط (جس ر) - ص (جس ر) = لا$
 $+ ط (جس ر) - ص (جس ر) = لا$ ۔ $ط ص = د ص$ ۔ د اسی ثبوت اسباب
 کہ اس مساوت کو قطر متجانس ہون فرض کر دیا مثال لا د =۔

ط^۲ جس رجبہ - ص^۲ جم رحم^۲ = . یا مس رمس^۲ = ط^۲
 یہاں ظاہر ہے کہ واسطی کسی ایک خاص قیمت کے ہر قیمت کی معلوم ہو جاوے گی
 یہاں سے ثابت ہوتا ہے کہ لامہایت جوڑی قطر کی ایسی ہو سکتی ہیں کہ جبکی نسبت سے اگر سادہ
 لئی جائے تو وہ ایسی مساوت مطلوب ہوگی کہ جبکی قطر متجانس ہوگی۔ اگر مس ر کم
 ص^۲ سی تو مس^۲ زیادہ ہونا چاہئے ط^۲ سی یعنی اگر ایک قطر ص^۲ ع شکل
 گذشتہ میں خط منحنی سے ملے تو قطر متجانس ص^۲ د خط منحنی سے نہیں ملے گا تو یہاں
 ثابت ہو کہ ہر ایک دو اقطار متجانس میں سے ایک ناممکن ہوتا ہے اور چونکہ ص^۲ ص^۲
 مساوی کا سادہ ایک مقدار مثبت کی ہی تو د و نورادیہ حادثہ یا منفرد ہونی چاہئے
 اور چونکہ شکل گذشتہ میں د و د نو حادثہ ہیں تو مقابل شاخوں کے واسطی د و د نو
 منفرد ہونگے -
 (۱۸۱) واضح ہو کہ ایسی قطر متجانس جو کہ تقاطع علی القوایم ہی ہوں ایک ہی
 جوڑا ہو سکتا ہے اور اسکا کچھ ذکر فقرہ (۱۳۲) میں ہوا ہے -
 (۱۸۲) تو اب مساوت خط منحنی کی یہ ہوگی
 {ط^۲ (جس ر) - ص^۲ (جم ر) + ط^۲ (جس ر) - ص^۲ (جم ر)} لا^۲ = - ط^۲ ص^۲
 اگر ہم متواتر فرض کریں = ۰ اور لا^۲ = ۰ تو ہمیں حاصل ہوگی وہ فاصلہ
 جو کہ بائیں نقطہ شروع اور اوّل نقطوں کے ہیں جہاں کہ خط منحنی قطع کرتا ہے نئے
 محور دنگو اور چونکہ یہی ہے ثابت کیا (۱۸۰) میں کہ ایک ان محور دنگو سے خط منحنی
 سی نہیں ملتا ہے تو ایک فاصلہ کو انہیں سے مقدار غیر ممکن سے تعبیر کرنا چاہئے اب

اب فرض کر دو کہ محور لا کا خط سختی سے شروع کر کے کسی فاصلہ ط^۱ پر مقناہی زمین
کر دو کہ طول دوسری نحو کا ص^۱ = ۱ یعنی فرض کر دو کہ کسی نقطہ متجانسین
ط^۱ اور ص^۱ = ۱ ہیں اب اگر ص^۱ = ۰

$$\text{تو } \{ \text{ط}^1 (\text{جس ر}^1) - \text{ص}^1 (\text{جم ر}^1) \} \text{ط}^2 = - \text{ط}^2 \text{ص}^2$$

اور اگر لا = ۰ تو $\{ \text{ط}^1 (\text{جس ر}^1) - \text{ص}^1 (\text{جم ر}^1) \} \text{ط}^2 = \text{ص}^2 - \text{ط}^2 \text{ص}^2$

اور مساوت بدلی ہوئی ہوگی $\frac{\text{ط}^1 \text{ص}^1}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ط}^1 \text{ص}^1}{\text{ط}^2} = \text{ط}^2 \text{ص}^2$

$$\frac{\text{ط}^1}{\text{ط}^2} - \frac{\text{ط}^1}{\text{ط}^2} = ۱ - \text{ط}^1 \text{ط}^2 - \text{ص}^1 \text{ط}^2 = - \text{ط}^1 \text{ص}^2 \text{شر}$$

(۱۸۳) بوسیله تبدیل کرنے کی ہمیں حاصل ہوگی تین مساواتیں آئیں

$$\text{ط}^1 \{ \text{ط}^1 (\text{جس ر}^1) - \text{ص}^1 (\text{جم ر}^1) \} = - \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots \dots \dots (۱)$$

$$\text{ص}^1 \{ \text{ط}^1 (\text{جس ر}^1) - \text{ص}^1 (\text{جم ر}^1) \} = + \text{ط}^2 \text{ص}^2 \dots \dots \dots (۲)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ط}^1 \text{جس ر}^1 - \text{ص}^1 \text{جم ر}^1 = ۰ \\ \text{یا مس رس ر}^1 = \frac{\text{ص}^1}{\text{ط}^1} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (۳)$$

اگر ہم عمل کریں مطابق (۱۸۴) کی یا کہ کچھ ص^۱ کو اور - ص^۱ آجھا

ص^۱ کے تو ہمیں حاصل ہوگا یہ ط^۱ - ص^۱ = ط^۱ - ص^۱ یا حاصل تفریق

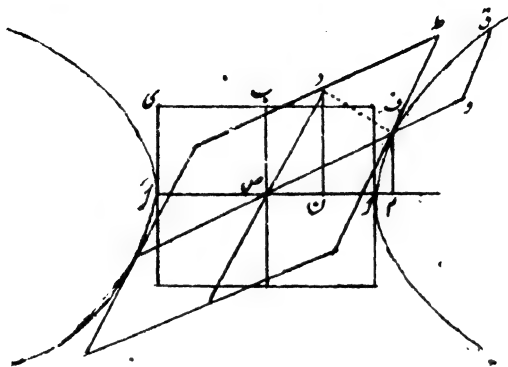
مربعوں کا جو کہ کچھ جادین اقطار متجانس پر مساوی ہوگا حاصل تفریق اور

مربعوں کو جو کہ کچھ جادین محور و منبر -

(۱۸۴) اور اب اگر ضرب کریں (۱) (۲) میں اور مجدد کریں (۳) کو

اور پھر تفریق کریں انکو اور اخذ کریں موافق (۱۸۵) کے تو حاصل ہوگا یہ

ط^۱ ص^۱ جس (ر-ر) = ط^۱ ص^۱ آب غا ہر ہی کہ (ر-ر) مساوی ہوگی
ن^۱ ص^۱ کی جو کہ در میان انقطاع ص^۱ اور ص^۱ دیکھو واقع ہی ہمانسی معلوم ہوا کہ اگر



تینچین جسم انجام انقطاع متجانس سے خطوط متوازی ان انقطاع کے تو ہمیں حاصل ہوگی وہ
کہ شدہ سے متوازی الاضلاع ن^۱ ص^۱ د^۱ = سطح ا^۱ ص^۱ ہی تو اب ثابت ہوا
کہ تمام متوازی الاضلاع کینچی کے اس شکل میں مساوی اور سطح کے ہی ہو جو کہ ضرب
دینی سے محور دینی حاصل ہوگی

شکلین فقرہ (۱۸۳) اور (۱۸۴) کی بطور آئینہ کے یہی ثابت ہو سکتی ہیں
فرض کرو کہ خط منحنی کے محور متقاطع علی القوایم ہیں جیسا کہ فقرہ (۱۸۴) میں ہیں
اور فرض کرو کہ اوٹا نقطہ کے ل^۱ اور د^۱ ہیں تو اس وقت خط مستقیم ص^۱ د^۱
کی یہ ہوگی ط^۱ و^۱ - ص^۱ ل^۱ = دور کرنی سے ل^۱ اور و^۱ کو بوسیدہ اس
مساوت اور مساوت خط منحنی کے (ط^۱ و^۱ - ص^۱ ل^۱ = ط^۱ ص^۱) تو ہمیں حاصل
ہوگی اوٹا ص^۱ د^۱ اور ص^۱ د^۱ جنہیں علامت ہ^۱ - ا^۱ کی نہیں ہوگی ص^۱ د^۱ = ل^۱

(۱۸۵) فقرہ (۱۸۲) سے معلوم ہوا کہ مساوت خط منحنی کے جبکہ نشان

لا اور د کی دور کی جاوین یہ ہوتی ہے $ط^۲ا - ص^۲ا = ط^۲ا - ص^۲ا$

شکل گذشتہ میں $ص = ط$ اور $ص = د$ اور $ص = د$

اور $د = ر$ اگر مساوت کو اس صورت میں لکھیں

$$ص^۲ا = ط^۲ا (لا - ط^۲ا) = (لا - ط^۲ا) \frac{ص^۲ا}{ط^۲ا} (لا + ط^۲ا) \text{ تو اب}$$

مربع ق و : سطح د اور د : مربع ص د : مربع ص د

(۱۸۶) مساوت ماس کی نقطہ ق پر جسکی دتر لا اور د بین (یہ ہی

ط^۲ا کو - ص^۲ا لا لا = ط^۲ا ص^۲ا - - - - -

(۱۸۷) اب فرض کرو کہ محور خط منحنی کے ص د اور ص ب ہیں اور فرض

کرو کہ اوتار ق کے لا اور د ہیں اور چونکہ مساوت ص د کی

$$ص = د \text{ لا تو مساوت ص د کی یہ ہوگی } ص = لا \text{ مسر } ص = لا$$

$$ص = ط^۲ا \text{ اور د = ص} = ط^۲ا \text{ یہاں سی ہمیں حاصل ہو گا یہ } ط^۲ا - ص^۲ا = ط^۲ا - ص^۲ا$$

$$لا^۲ا + ص^۲ا - لا^۲ا - ص^۲ا = لا^۲ا + ص^۲ا - لا^۲ا - ص^۲ا = \frac{ص^۲ا}{ط^۲ا} - \frac{ص^۲ا}{ط^۲ا} = \frac{ص^۲ا}{ط^۲ا} - \frac{ص^۲ا}{ط^۲ا}$$

$$+ \frac{ط^۲ا - ص^۲ا}{ط^۲ا} = \frac{ط^۲ا - ص^۲ا}{ط^۲ا} = \frac{ط^۲ا - ص^۲ا}{ط^۲ا}$$

اور مثلث ق ص د = منحنی ق م د + مثلث د س ق - مثلث ف س م

$$= (لا - لا) \frac{ص}{ط} + \frac{ص}{ط} - \frac{لا - لا}{ط} = \frac{ص}{ط} - \frac{لا - لا}{ط}$$

$$\frac{1}{ط} \{ لا - ص \} = \frac{ص}{ط} - \frac{لا - لا}{ط} = \frac{ص^۲ا - ط^۲ا}{ط^۲ا} = \frac{ط^۲ا - ص^۲ا}{ط^۲ا}$$

تو اب معلوم ہوا کہ متوازی الاضلاع ق ص د = ط ص

ممر = $\frac{ص \times ل}{ط}$ یا $\frac{ط \times و}{ص}$ = $\frac{ص \times ل}{ط}$ لیکن ممر و $\frac{ط}{ص}$ ماس کی نقطہ

ف پر یہ ہوگی کہ $\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و}$ = $\frac{ط \times و}{ص \times ل}$ = $\frac{ط \times و}{ص \times ل}$ یہاں سے معلوم ہوا کہ خط ص د

یا قطر متجانس ص د کا متوازی ہی اوس ماس کی جو کہ ف پر کہنیا جادے گا

قطر متجانس کی وہی ہو کہ ماس کی جو کہ ای جز اخیر $\frac{ط \times و}{ص \times ل}$ کے

(۱۸۸) فرض کر دو کہ $\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و}$ اور $\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و}$ اور $\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و}$ کی ہین تو بر سید اس ماس

$$\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل}$$

$$\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل}$$

$$\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل}$$

یہ یعنی مربع قطر متجانس ص د = سطح س ف اور ہ ف

(۱۸۹) اگر خط ع ف کا نقطہ ف سی عمود ص د پر کہنیا جادے جیسا کہ

شکل گذشتہ سی ایک شکل پس میں بھیجا دے ہر تو سطح ع ف اور ص د =

$$\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل}$$

اور ف ک = $\frac{ط \times و}{ص \times ل}$ اور ف ک = $\frac{ط \times و}{ص \times ل}$ یہاں سے ثابت ہوا کہ

سطح ف ک لعد ف = مربع ب ص اور سطح ف ک اور ع ف = مربع ا ص اور

سطح ف ک اور ف ک = مربع ص د — دتر التمام کی بیانین

(۱۹۰) اگر دو خط ایک نقطہ سی جو کہ خط منحنی پر ہی دو انجام ایک قطع تک کیجئے

اگر فاصلہ ص د = ع اور ب = اوس عمود کی جو کہ کہنیا جادی مرکز سے ماس پر تو یہ

$$\frac{ط}{ص} = \frac{ل}{و} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل} = \frac{ط \times و}{ص \times ل}$$

انکی کچھ سکتے ہیں

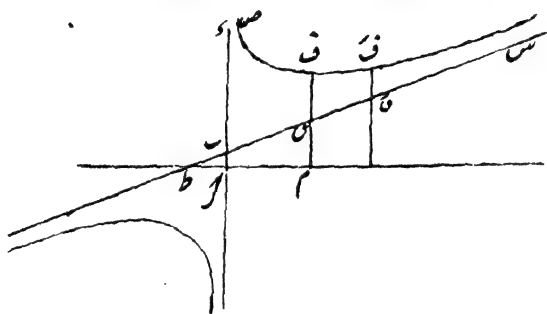
(۱۹۲) چونکہ قطر متجانس متوازی اوتار التمام ہوتی ہیں موانق (۱۴۴) کے
اسیو سطحی وہ سطح سی کچھ سکتی ہیں کہ مابین انکی ایسا زاویہ ہوگا جو کہ درمیان
۹۰ اور ۹۰ بن سکتا ہے۔

(۱۹۴) واضح ہو کہ مساوی قطر متجانس بعید البیضوی میں نہیں ہوتی ہیں لیکن
اس خاص خط منحنی میں جس میں ص = ط اور اس صورت میں ہمیں حاصل ہوگا یہ
ط^۱ - ص^۱ = ط^۲ - ص^۲ = ۰ یہاں سی ثابت ہوگا کہ قطر متجانس ط^۱ اور ص^۱
مساوی ایک دوسری کی ہیں اور مساوی اس خط منحنی کے جبکہ بعید البیضوی
مساوی القطرین کتنی ہیں یہ ص^۲ - ط^۲ = ط^۱ - ص^۱

خطوط متغیر المقات کی بیانیں

(۱۹۴) پہلی اہم بیان کیا ہے کہ اکثر خواص بیضوی کے بوسیہ نیوٹی تہہ کی
خواص بعید البیضوی کی مطابق ہوتی ہیں لیکن بعض خاصیتیں بعید البیضوی کی اس
ہیں جو کہ بیضوی میں نہیں پائی جاتی ہیں یہ فرق صرف بسبب شکل غریب اور کمرے
کی جولا نہایت پہیلی ہیں واقع ہوتی ہیں ظاہری کہ مسر مسر = ص^۱ (۱۹۵)
اور جیسا کہ قیمت مسر کی قریب ص^۱ کی آتی ہوگی قیمت مسر کی ہی قریب آئے
آتی ہے۔ ہم اب بیان کریں گے کہ خط منحنی قریب ہی خط متغیر المقات آتا ہے
لیکن اوتسی میں متا ہی اور جو کہ یہ صفت صرف بعید البیضوی میں ہی نہیں پائی جاتی
یہ اسو بھی اسکو ب ہم غوما لکھیں گے۔

(۱۹۵) فرض کرو کہ سن فن ایک ایسی خط منحنی ہے جسکی مساوت بعد نقصان کی یہ ہوگی کہ $\text{سن} = \text{ط} + \text{ص} + \frac{\text{سن}}{\text{لا}}$ اور مان لو کہ ط ب سن وہ خط ہی جسکی مساوت یہ ہے کہ $\text{سن} = \text{ط} + \text{ص}$ واسطی ایک خاص قیمت لا کی ترقی م کا حاصل ہوگا اور جبکہ جمع کرین گی اس خط پر $\frac{\text{سن}}{\text{لا}}$ کو توہین حاصل ہوگا ایک نقطہ فن خط منحنی کا اسطرحی ہم دریافت کر سکتی ہیں نقاط (ف) اور (و) وغیرہ اور



خط منحنی اور خط مستقیم پر ہو گئی۔ چونکہ سن کم ہوتا ہی جبکہ لا زیادہ ہوتا ہی اس واسطی خط فن کا کم ہوگا فن سی جیسا کہ لا زیادہ ہوتا ہی اتنا ہی خط فن کا کم ہوتا ہی اور جبکہ لا انتہایت زیادہ ہوگا تو فن انتہایت کم ہوگا یا خط منحنی لا انتہایت قریب خط ط ب سن کے آؤں گا لیکن یہی حقیقت میں اسی نہیں بلکہ اس واسطی خط ط ب سن کو خط مستقیم الماقات خط منحنی کا کچھ تر مساوت خط ط ب سن کے یہ ہے کہ $\text{سن} = \text{ط} + \text{ص}$ اور یہی مساوت خط منحنی کا ہو باوگی جبکہ لا اوپر زیادہ کیا جاوے

(۱۹۶) یہی دلیل اسوقت ہی عمل میں آ سکتی ہے جبکہ قواسمی منحنی لا کی ایک

زیادہ ہوں اگر صورت عام سادہ خط منحنی کی یہ ہو

$$k = \text{وغیرہ} + m^2 + n^2 + \text{طا} + \text{ص} + \frac{\text{س}}{\text{لا}} + \frac{\text{ن}}{\text{م}} + \text{وغیرہ}$$

تو سادہ خط متفرع الماقات منحنی کے یہ ہو کی $k = \text{وغیرہ} + m^2 + n^2 + \text{لا} + \text{ن}$

$$+ \text{طا} + \text{ص} \text{ اور سادات } k = \text{وغیرہ} + m^2 + n^2 + \text{لا} + \text{طا} + \text{ص} + \frac{\text{س}}{\text{لا}}$$

سی حاصل ہوتا ہی ایک خط زیادہ متفرع الماقات کا بہ نسبت

پچھلی سادہ کی یہاں سی حاصل ہوتا ہی ایک سلسلہ خطوط منحنی کا جو کہ زیادہ تر

قریب اصل خط منحنی کے آویںگی۔

(۱۹۷) اب ہم استعمال کریں گے اوس ترکیب کا اون خط منحنیوں میں جنکی

سادہ درجہ دوم کی ہر اور انکی سادہ عام یہ ہر موافق فقرہ (۷۵) کا

$$k = \frac{\text{ص} + \text{لا}}{\text{طا}} \pm \sqrt{\frac{1}{\text{طا}^2} (\text{ص}^2 - \text{م}^2 \text{طس}) (\text{لا}^2 - \text{ن}^2 \text{طس})} + \text{لا} + \text{ن} + \text{د} - \text{م} - \text{طس}$$

$$= \frac{\text{ص} + \text{لا}}{\text{طا}} \pm \sqrt{\text{م}^2 \text{لا} + \text{ن}^2 \text{لا} + \text{م}^2 \text{ع}} \text{ موافق فرض کی}$$

$$= \frac{\text{ص} + \text{لا}}{\text{طا}} + \text{لا} + \text{م} \left\{ 1 + \frac{\text{ن} + \text{لا}}{\text{م}^2 \text{ع}} \right\}$$

$$= \frac{\text{ص} + \text{لا}}{\text{طا}} + \text{لا} + \text{م} \left\{ 1 + \frac{1}{\text{م}} \left(\frac{\text{ن} + \text{لا}}{\text{م}^2 \text{ع}} \right) + \text{وغیرہ} \right\}$$

$$= \frac{\text{ص} + \text{لا}}{\text{طا}} + \text{لا} + \text{م} \left\{ 1 + \frac{1}{\text{م}} \text{فی} \right\} \pm \text{اجزای مقدار مقررہ} \text{ تو اب معلوم}$$

ہوتا ہی کہ سادہ خط متفرع الماقات کی یہ ہی $k = \frac{\text{ص} + \text{لا}}{\text{طا}} \pm$

$$\pm \text{م} \left\{ 1 + \frac{1}{\text{م}} \text{فی} \right\} = \frac{\text{ص} + \text{لا}}{\text{طا}} \pm \sqrt{\frac{1}{\text{طا}^2} (\text{ص}^2 - \text{م}^2 \text{طس}) (\text{لا}^2 - \text{ن}^2 \text{طس})} + \text{لا} + \text{ن} + \text{د} - \text{م} - \text{طس}$$

جو کہ ص - م طس منحنی ہی بیضوی ہے اور اصل اس مورنین سادہ کی نشہ

کسی خط منحنی سے تعلق نہیں کہی کی اور جبکہ یہ صورت ہو کی ص - م طس = ۰

یا جبر

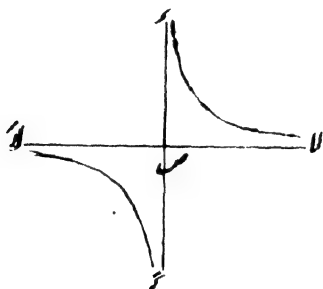
کہنچی جاوین تو اس صورت میں مساوات گذشتہ میں آتا یا اجا و لگا سکتا
 یہ مساوات تعلق رکھتی گی خط متفرق الملاقات منحنی سے تو اب معلوم ہوا کہ صرف ایک ہی
 کا خط متفرق الملاقات مستقیم خط ہی اور اس سے علالت سے معلوم ہوتا ہے کہ
 دو خط متفرق الملاقات ہونگی اور انکو وہ قطر تصنیف کر لیا جسکی یہ مساوات

$$= \frac{ص + لا}{ط} - ص$$
 اور خطوط متفرق الملاقات مرکز سے بھی گذرتی ہیں بیونکہ اگر
 فرض کریں $لا = ط - ص$ تو $= \frac{ص + لا}{ط} - ص = \frac{ص + ط - ص}{ط} - ص = \frac{ط}{ط} - ص = ۱ - ص$
 اور قیمتیں لا اور ط کے اوتار مرکز کی ہیں۔

(۱۹۸) اگر مساوت خط منحنی میں اجزای لا اور د کا کی باقی بنجہ دین تو ایک تہوڑی تبدیلی کے وسیعہ ہم مساوت کو ایک ایسی سلسلہ سی بدل سکتی ہیں کہ کو سین تہوڑے د اور د کا کی منفی ہو گئی مثلاً اگر مساوت یہ ہو ص لا + د + ی لا + ف = ۰
تو د = ص لا + ی لا + ف = $\frac{\text{ص لا} + \text{ی لا} + \text{ف}}{\text{ص لا} + ۱ + \frac{\text{د}}{\text{ص لا}}}$
ص لا + ی لا + ف = $(۱ + \frac{\text{د}}{\text{ص لا}}) ۱$

سلا + ی لا + ن = $(1 + \frac{2}{صلا})$
 - $(\frac{صلا}{صلا} + \frac{ک}{صلا} + \frac{ن}{صلا}) (1 - \frac{2}{صلا} + \frac{2}{صلا})$ - وغیره
 مهم امد ددر کرین باقی قوای لا کو تو حاصل ہوگی سات خط متفرقات کی جو
 یہی د = $\frac{ن}{صلا} - \frac{ک}{صلا} + \frac{2}{صلا}$ یا $صلا + صلا = صلا$
 دوسرا خط متفرقات اس طرح حاصل ہو سکتی فرض ایک ایسی خاصیت لاک
 جسے وسیلہ سے ایک صحیح لایہایت قیمت کی حاصل ہو ا قیمت لاکے وسیلہ مقام دوسرے
 خط متفرقات کی معلوم ہو جائیگا اب اگر فرض کرین ہم $صلا + د = تو$

یہاں سے ثابت ہوا کہ اگر خط نقطہ (لا) = - (ص) سے متوازی محور کو
 کھینچ جاوے تو یہ خط متغیر الملاقات مطلوب ہوگا اگر مساوات یہ ہو
 طر + ص لا + د + سی لا + ف = ۰ تو مساوت خط متغیر الملاقات
 یہ ہوگی طر + ص لا = طر - ص د اور ص د + سی = ۰ اور دوسرا خط متغیر
 الملاقات متوازی محور کو کی ہو اگر مساوت یہ ہو ص لا + د + سی لا + ف = ۰
 تو مساوتین خطوط متغیر الملاقات کی یہ ہوگی ص لا + د = ۰ اور ص د + سی
 = ۰ پہلا خط متغیر الملاقات متوازی کو کی ہو اور دوسرا متوازی محور کو کی ہو
 (۱۹۹) اگر مساوت یہ ہو ص لا + ف = ۰ تو اس صورت میں خط



متغیر الملاقات

محور ہو گئے

مقام خط منحنی

کا اس مساوت

سے معلوم ہو جاوے گا

د = - (ف / ص لا) = موافق فرض کے فرض کرو کہ ص لا اور ص د
 محور میں اب فرض کرو کہ لا = ۰ تو د = ∞ جتنا لا زیادہ ہوگا اتنا
 ہی د کم ہوگا اور جب لا = ∞ تو د = ۰ تو اب ہمیں حاصل ہوگی
 شخ کو لا کی اگر لا منفی ہو تو یہی منفی ہوگا اور جبکہ لا زیادہ سے
 ∞ تک تو د کم ہونا شروع کرے گا جس سے جبکہ تو اب حاصل ہوگی

فرض کیا جاوے اور محور متقاطع علی القوائیم تو $\angle \alpha - \angle \beta = \angle \gamma$ - ط
 اس واسطے مساوت خطوط متفرع المقات کی یہ ہوگی $\angle \alpha - \angle \beta = 0$ ۔
 یا $\angle \alpha = \angle \beta$ یعنی خطوط متفرع المقات زاویہ 90° کا محور ہوں گے
 بنائی ہیں اور زاویہ 90° کا آپس میں یہاں سے معلوم ہوا کہ محور بعید البیضیہ
 مساوی القطرین کے متقاطع علی القوائیم ہوتی ہیں - غ
 (۲۰۲) اگر اس خط منحنی کا نقطہ شروع آ فرض کیا جاوے اور محور
 متقاطع علی القوائیم تو ظاہر ہے کہ مساوت بعید البیضیہ کی یہ ہوگی
 $\angle \alpha = \angle \beta$ (یا $\angle \alpha - \angle \beta = 0$) $\angle \alpha = \angle \beta$ (یا $\angle \alpha - \angle \beta = 0$) جبکہ
 پہلا دین یا یون صورت مفصلہ اس کی جذر کی اور چھوڑ دین خواہی
 لاگو تو حاصل ہوگی یہ مساوت خطوط متفرع المقات کی
 $\angle \alpha = \angle \beta$ (یا $\angle \alpha - \angle \beta = 0$)

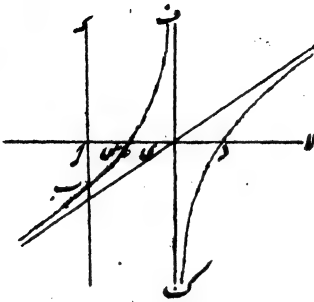
(۲۰۳) اگر فرض کریں ہم مساوت ایک خاص خط مستقیم کی
 $\angle \alpha = \angle \beta$ (یا $\angle \alpha - \angle \beta = 0$) اور یہ خط متوازی خط متفرع المقات کی ہو
 اور دور کریں تو کو بوسیدہ اس مساوت کی اور مساوت خط منحنی کے
 تو ہمیں حاصل ہوگی صرف ایک قیمت لا کی تو اب ثابت ہوا کہ ایک خط
 مستقیم متوازی خط متفرع المقات کی قطع کرتا ہے خط منحنی کو ایک نقطہ پر
 (۲۰۴) فقرہ (۷۷) یعنی بیان کیا ہے کہ بعض صورتوں میں صورت
 خط منحنی کی آسانی سے نہیں معلوم ہو سکتے سبب مثلاً جبکہ خط منحنی

نظر کو تقاطع کنری دو اقطار منجانبس میں سے تو اس صورت میں ایک طرح کا
 اسٹال واقع ہوگا دریافت کرنی میں صحیح صورت خط منحنی کے اور با خطوط
 مستقر الملاقات بہت فائدہ مند ہو گئی واسطی معلوم کرنے مقام خط منحنی
 کی مثلاً اگر مساوات یہ ہو $\text{لا} = \text{ص} + \text{لا} + \text{س}^2$ یا $\text{د} = \text{لا} + \text{ص}$
 اگر فرض کیا جاوے $\text{لا} = ۱$ ، تو $\text{د} = \infty$ اور جبکہ لا
 بہت بڑا فرض کیا جاوے تو تقریباً مساوی $\text{لا} + \text{ص}$ کی ہوگا تو اب
 معلوم ہوگا کہ خطوط آء اور ط ب س شکل (۱۹۴) میں خطوط مستقر
 الملاقات بعید البیضوی تعبیر کریں گے اور چونکہ خط منحنی محور دسی نہیں ملتا
 تو معلوم ہوگا کہ یہ خط منحنی واقع ہی درمیان زاویہ د ب س کی اور مقابل
 کی زاویہ ط ب آء کے تو اب رستہ خط منحنی کا بخوبی معلوم ہو گیا جس
 شکل (۱۹۴) میں ہے۔

مثال (۲)

$\text{د} = (۲ - \text{لا}) = (۱ - \text{لا}) (۱۲ - \text{لا})$ یا $\text{د} = (۱ - \text{لا}) (۱۳ - \text{لا})$ چونکہ
 $\text{ص} = ۲ - \text{لا}$ میں مثبت ہی تو معلوم ہوتا ہے کہ یہ مساوات بعید البیضوی
 کی ہے تو اب کبھی محور متقاطع علی القوائیم آء اور د اور دریافت کرو
 وہ نقاط جہاں کہ یہ خط منحنی تقاطع کرتا ہے محور د کو د فرض کرو
 کہ $\text{لا} = ۰$ $\text{د} = ۱۲$ یا $\text{د} = ۱۳$ اور فرض کرو کہ $\text{د} = ۰$
 $\text{لا} = ۱$ یا $\text{لا} = ۱۲$ اور $\text{لا} = ۱۳$ تو اب معلوم ہوا کہ
 خط منحنی نقاط س اور د سے گزرتا ہے واسطی دریافت کرنی

خطوط مستقر الملاقات کی فرض کر دے کہ $۲ = ۱ - ۱$ $۳ = ۲ - ۱$ تو اب



ثابت ہوا کہ اگر $۱ = ۲$

تو خط ۱ کی جگہ جو کہ عمود ہے

ایک خط مستقر الملاقات ہی

اور اب دریافت کر دوسرے

خط مستقر الملاقات کو تو اب

$$= \frac{(۳-۱)(۱-۱)}{(۲-۱) \times ۱} = \frac{(۳-۱)(۱-۱)}{۲-۱} = ۱$$

$$= ۱ \left(\frac{۲}{۱} - ۱ \right) \frac{(۳-۱)(۱-۱)}{۱}$$

$$\frac{۳+۱۲-۲}{۱} = (۱ + \frac{۲}{۱} + \text{غیرہ}) = (۱ + \frac{۳}{۱} + \text{غیرہ})$$

تو اب یہاں سے معلوم ہوا کہ مساوات

دوسری خط مستقر الملاقات کی یہی ہے $۲ = ۱ - ۱$ اسی واسطے اس خط

کو کہنا چاہئے نقطہ ۱ سے بناتا ہوا زاویہ ۵۰ کا محور آسانی

اب ہم مقام خط منحنی کا بخوبی دریافت کر سکتے ہیں کیونکہ واسطے تمام قیمتوں

لاگے جو کہ کم ہیں آسانی سے ہوں گے تو اب اس فرض کی موافق شاخ

بہت حاصل ہوگی اور واسطے ایسی قیمتوں لاگے جو کہ آسانی سے زیادہ

آسانی سے کم ہیں آسانی سے ہوں گے اور زیادہ ہونا جاوے گا۔

تو اب اس فرض کے وسیلہ سے شاخ ۱ کے حاصل ہوگی اور

دوسری ایسی قیمتوں کے جو کہ ۲ سے زیادہ اور ۳ سے کم ہیں وہ منفی ہوگا تو اب پیدا ہو گئے شاخ کے دکی اور واسطے اور قیمتوں کے جو کہ ۲ سے زیادہ ہیں مثبت اور قریب آتا جاوے گا لا - ۲ کے یہاں ہی معلوم ہوگی وہ شاخ جو کہ نقطہ دسی دوسری خط متفرقات کی طرف پہنچتی ہے واسطے تمام قیمتوں منفی لا کے کہ منفی ہوگا اور زیادہ ہونا شروع کرے گا - ۳ سے ۴ تک اور قریب آتا جاوے گا (۲-۱) کی یہاں ہی معلوم ہوا کہ خط منفی نقطہ بے بسی نیچے پہنچتا طرف خط متفرقات کی - مثال (۳)

۱ (لا - ط) = لا (۲-۱) یہاں لا = ط اور ۱ = لا - ط
ساداتین خطوط متفرقات کی ہیں شکل اسکی لکچلی شکل کی ہے
اگر فرض کیا جاوے نقاط ۱ اور ۳ کو منطبق ایک دوسری ہر
مثال (۴) ۱ = ط لا + لا = ط ط ہر ہی کہ بیان ہوگا
ایک خط متفرقات ہوگا کیونکہ جب لا = ۰ تو ۱ = ۰
اور ۱ = لا (۱ + ط) = لا + ۲ ط + ط تو اب یہاں سے معلوم
ہوتا ہے کہ دوسری خط متفرقات کی یہ مساوت ہے لا = ۰
(۲۰۵) باب (۷) میں پہنچے بخوبی بحث مساوت درجہ دوم کی
لکھی ہے اور وہ ان ترکیب اسکی اختصار کی یہی بیان کی گئی ہے اور وہ ان
یہ بھی لکھا ہے کہ اگر مساوت متعلق بعید البیضی سے ہو تو مساوت

اسکی بعد اختصار کے یہ ہو جاوے گی $۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ (۸۴)
 واضح ہو کہ یہی سادہ اس قدر مختصر ہو سکتی ہے کہ اسکی صورت بعد اختصار
 کی یہ ہو جاوے گی $۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ اور چونکہ یہ صورت بہت فائدہ مند ہے
 واسطی بحث خطوط مستقر الملاقات کی اس واسطے اب ہم اسکو بیان کریں گے
 (۲۰۶) فرض کرو کہ محور سادہ متقاطع علی القوائیم ہیں اور صورت
 اسکی یہ ہو $۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ اب فرض
 کرو کہ $۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ اور اب موافق فقرہ (۸۰)
 فرض کرو کہ اشال ۱۰ اور ۲۰ کی سادہ صفر کی بین تو اب بواسیلہ
 اس تبدیلی کے جو سادہ کہ حاصل ہوگی وہ متعلق مرکز سی ہوگی
 اور صورت اسکی یہ ہو جاوے گی $۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$
 اسطرحی واسطی دور کر کے اشال ۱۰ اور ۲۰ کی بیہ لوسمت
 محورون متقاطع علی القوائیم کے طرف ترجہی محوروں کے (۵۷)

$$۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$$

اور $۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ بواسیلہ لکھنی ان قیمتوں

۱۰ اور ۲۰ کی سادہات گذشتہ میں اور علی الترتیب لکھنی قوائی ۱۰
 اور ۲۰ وغیرہ کی حاصل ہوگا یہ

$$\begin{aligned} & ۱۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ \\ & ۲۰ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ \end{aligned}$$

۱۲ { جس ر جس ر + ب (جس ر جس ر + جس ر جس ر) +
 ۲ جس ر جس ر + ف = ۰ جو کہ اس مساوت میں دو مقداریں
 ر اور ر کی غیر منقطع ہیں اسبواسطی فرض کر سکتے ہیں امثال لا
 اور ۲ = ۰ ۱ (جس ر) + ب جس ر جس ر + س (جس ر) = ۰ (۱)
 اور ۱ (جس ر) + ب (جس ر) (جس ر) + س (جس ر) = ۰ (۲)
 تقسیم کرنیسی اول مساوت کو (جس ر) پر ہمین حاصل ہوگا یہ

۱ (س ر) + ب س ر + س = ۰
 س ر = ب $\frac{1}{\pm 1 - 2 - 3}$ جو کہ صورتیں دونو
 مساواتوں کے شدہ کی ایک سی ہیں تو حل کرنے سے مساوت دوہم کو ہمین
 حاصل ہوگی وہی قیمت (س ر) کی جو کہ (س ر) کی حاصل ہوگی
 یعنی سمت دونوں ہی محور دکنی (س ر) کے وسیلہ دریافت ہو سکتی ہے
 اور ظاہر ہے کہ اس صورت میں شکل مساوت کی یہ ہوگی

ب لا ۲ + ف = ۰ - ث ث ث
 (۲۰۴) اب دریافت کر قیمت ب کی ظاہر ہے کہ
 ب = ۱۲ جس ر جس ر + ب (جس ر جس ر + جس ر جس ر) +
 ۲ جس ر جس ر = جس ر جس ر { ۱۲ س ر + س ر +
 ب (س ر + س ر) + س { ہم ابھی ثابت کر آئی ہیں
 س ر س ر = س اور جس ر + س ر = - س اسبواسطی

$$\text{جم جم} = \frac{1}{(1-s)} + \frac{1}{s}$$

$$= \left\{ur + \frac{r}{j} - ur\right\} \frac{1}{r + (u-1)} = \frac{r}{r + (u-1)}$$

$$\frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x + 1} = 1 + \frac{-x}{x^2 + 2x + 1} \quad \text{اور} \quad \frac{-x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x+2} \quad (۸۰)$$

ما (ط-س) + ب = س + م + س
 ما (ط-س) + ب = س + م + س

(۲۰۸) اگر اصلی محو تر بھی ہوں تو میں صورتیں (۵۶) کی یعنی جا مشر

$$\text{مس } 1 = \pm \frac{\text{ماب } 2 - \text{م } 1 \text{ سے } - \text{ب } + \text{آ سے محکم}}{(1 + \text{م سے } (ج کم) - 2) \text{ ب ج کم} - (\text{ب } 2 - \text{م } 1 \text{ سے})}$$

$$b' = \sqrt{(a + s - b \text{ جمک})^2 + (b - 2 - s \text{ جمک})^2}$$

(۱۰۹) مثالین آئندہ کو کہ جنس و اتمین محتضاض علی القوم

ہمیں ایسی باتوں سے تبدیل کرنی چاہی جو متعلق خطوط سفر المذاق
سی ہوں مثال (۱)

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \frac{1}{1-x} \quad \text{یہاں } m = \frac{1}{x} \text{ اور } n = \frac{1}{x}$$

اور $\frac{1}{1} =$ اور $5 \pm 2\sqrt{4}$ اور $\frac{1}{5} =$

$$\frac{10}{121} = 5\frac{5}{11} \therefore = \frac{9}{1} + 5\frac{5}{11} \therefore$$

مثال (۲) $n^2 - 5n + 1$: $n=1$: $1 - 5 + 1 = -3$

بیان ہے کہ $\frac{1}{2} = 0.5$ اور $\frac{1}{3} = 0.3333$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 0.8333$

اور مساواتیں تبدیل کرنی کی یہ ہو جائیگی کہ $\frac{لا - ک}{۲۷} = ۰$ اور

$$\frac{لا + ک}{۲۷} = ۰ \quad \therefore \left(\frac{لا - ک}{۲۷} \right)^2 - \left(\frac{لا + ک}{۲۷} \right)^2 = ۰$$

۲ - لا ک = ۲۷ اور لا ک = $\frac{۱}{۲۷}$ جس مثال میں مقام

منفی کا ایسا ہوگا جیسا کہ شکل آئندہ میں ہے پہلی اس مساوت کی محور

آلا اور آر تھی لیکن اب اس کی محور خط مشرق الملاقات صعد

اور صعد ہیں اور زاویہ ج صعد = ۹۰

(۲۱۱)۔ یکس مرقوم بالا کی فرض کرو کہ یہ مساوت دی ہوئی ہے

لا = ک اور دریافت کیا جاتے ہیں ہم پوسید اس مساوت کی ایک

ایسی مساوت جس کے محور متقاطع علی القوائیم ہوں اور معلوم کر طول

اس مساوت کی محور دیکھا واسطی ثبوت اس دعویٰ کے ہستعالیٰ کرد

(۵۶) کو واسطی بولنی سمت ترجیحی محور کے طرف محور دن متقاطع علی

القوائیم کے طاسری کہ $\frac{لا + ک}{۲۷} = ۰$ اور لا =

لا حصہ (ک - ر) - قجم (ک - ر) کہنے میں ان قسیتوں لا اور ک

جس کے

کو مساوت لا = ک میں حاصل ہوگا لا جس جس (ک - ر)

- قجم رجم (ک - ر) + لا ک { قجم جس (ک - ر) - جس جس (ک - ر) }

= ک { جس (ک) } فرض کرو امثال لا ک = ۰ جس جس (ک - ر)

- جس رجم (ک - ر) یا جس (ک - ر) = ۰ جس (ک - ر) = ۰

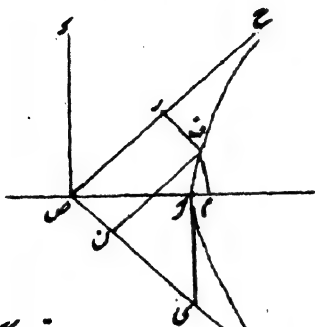
اور ر = $\frac{۱}{۲۷}$ یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ محور لا جو کہ پوسید زاویہ

کی معلوم ہو سکتا ہی تصنیف کرتا ہی زاویہ کے گوجہ در میان
 خطوط متفرقات کی یہ یہ مطابق ہی او سس اشارہ کی جو کہ مہنی
 فقرہ (۱۸۹) کی انجام میں لکھا ہی جبکہ لکھنے کے ہم $r = \frac{1}{2}$
 تو صورت مساوت گذشتہ کی یہ ہوگی لا (جس کے $\frac{1}{2}$) کہ $\frac{1}{2}$ (جم کے $\frac{1}{2}$)
 $=$ کہ (جس کے $\frac{1}{2}$) اور زمین جز لا کا زایل ہو گیا ہی اور جبکہ لکھا
 پہنے جس کے $= 2$ جس کے $\frac{1}{2}$ جم کے $\frac{1}{2}$ تو حاصل ہو گا یہ

یہ کہ (جس کے $\frac{1}{2}$) - یہ کہ (جس کے $\frac{1}{2}$) $= 1 -$
 مطابق کرنی سی اس مساوت کو مساوت $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 -$ اسے
 ہمیں حاصل ہو گا یہ $\frac{1}{2} = 2$ کہ جم کے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = 2$ کہ جس کے $\frac{1}{2}$
 تو اب طول $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ جو کہ نصف محور ہیں معلوم ہو جاوے گا اگر صورت
 مساوت کی یہ ہو لا + ط + ص + س = ۰ پہلی اس مساوت
 کو رجوع کر دے طرف مرکز کے یعنی بدلو اس مساوت کو ایسی مساوت سی جس کا
 نقطہ شروع مرکز ہو اور یہ عمل کر دے موافق ترکیب گذشتہ کے -

(۲۱۲) تحویل کر دے مساوت بعید البیضوی جس کا نقطہ شروع مرکز ہو
 اور محور متقاطع علی القوائیم طرف اس مساوت کے لا = کہ
 فرض کر دے کہ $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ محور متقاطع ہیں اور $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$
 خطوط متفرقات یا ہی محور ہیں $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لا کے اصغر در نقطہ کی ہیں
 من = ۰

صن = لا { نئے و طرف کے ہیں۔
 ن = لا
 اب درمی تبدیل کرنی سمت



محور و کجے فرض کر دو کہ

$$ص = لا جبر + لا جبر$$

$$لا = لا جبر + لا جبر$$

لکھو ان قیمتوں لا اور لا

کو مساوت بعد البضوی

تو یہ مساوات ہو گی

$$\text{مین } ط^2 - ص^2 = ط^2 - ص^2$$

$$ط^2 (لا جبر + لا جبر) - ص^2 (لا جبر + لا جبر) = ط^2 - ص^2$$

$$\{ ط^2 (جبر) - ص^2 (جبر) \} - \{ ط^2 (جبر) - ص^2 (جبر) \} = ط^2 - ص^2$$

$$ط^2 (جبر) - ص^2 (جبر) = ط^2 - ص^2$$

اس مساوت کی طرف مساوت مطلوب کی اجزائی لا اور لا کو دور کرنا

چاہی اور چونکہ اس مساوت میں دو مقداریں غیر مقررہ داخل کی گئی

ہیں اس لیے ہم ایشال لا اور لا کو مساوی صفر کی فرض کر سکتے ہیں

تو اب فرض کر دو کہ $ط = ص$

$$ط^2 (جبر) - ص^2 (جبر) = ط^2 - ص^2$$

$$ط^2 - ص^2 = ط^2 - ص^2$$

مساوت اخیر سے یہ حاصل ہو گا

مساوت اور چونکہ مساوت اول سے یہ قیمت (مساوت) کی

حاصل ہوگی تو اب معلوم ہونا ہی کہ قیمتیں لا اور لا کی دو مساوات

مین داخل بین مسر = $\pm \frac{ص}{ط}$ یعنی اگر مسر (= $\frac{ص}{ط}$) متعلق محور لاکی ہو تو مسر (= $\frac{ص}{ط}$) متعلق تو کی ہوگا
(یعنی مسر = $\frac{ص}{ط}$ وسطی محور لا کے فرض کیا ہے تاکہ یہ فرض مطابق شکل کی ہو) تو اب ثابت ہوا کہ مساوی خط منحنی کی جبکہ خط متفرع المقات اسکی محور ہوں یہ ہوگی

۱. {ط جس جس ر - ص جم جم ر} لاؤ = - ط ص یا
جم جم ر {ط مس مس ر - ص} لاؤ = - ط ص اور چونکہ

مسر = $\pm \frac{ص}{ط}$ تو جم جم ر = $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2} \frac{ص}{ط}$ = $\frac{1}{2} \frac{ص}{ط}$ جم ر
۲. $\frac{2}{ط} \frac{ص}{ط}$ {ط ص - ص} لاؤ = - ط ص یا
- $\frac{2}{ط} \frac{ص}{ط}$ لاؤ = - ط ص ۲ لاؤ = $\frac{2}{ط} \frac{ص}{ط}$

اگر ص = ط یعنی اگر بعید البیضوی مساوی القطرین ہو تو مساوی اسکی موافق محور دون خط متفرع المقات کی یہ ہوگی لاؤ = $\frac{2}{ط}$

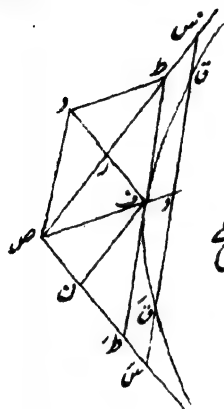
(۲۱۳) فی ہر ہی کہ زاویہ درمیان خطوط متفرع المقات کی ہر ہی تو اب اگر ف و متوازی ص ن کی کہنچا جاوے تو سطح فن ص ر =

لاؤ جس ہر = لاؤ جس ر جم ر = $\frac{2}{ط} \frac{ص}{ط}$ یا $\frac{2}{ط} \frac{ص}{ط}$ ص
۳. $\frac{ط}{ط}$ = $\frac{ط}{ط}$ تو اب ثابت ہوا کہ تمام متوازی الاضلاع بنائی

گئی اور اوٹار کی جو کہ متوازی خطوط متفرع المقات کی ہوں مساوی ایک دوسری کی ہوتی ہیں اور مساوی نصف سطح نصف محورون کی یعنی برابر

برابر $\frac{5}{4}$ کے ہیں۔

(۲۱۴) فرض کرو کہ ص ص اور ص س خطوط متفرع الملاقات ایسی خط



مستقر المقات معلوم ہوں تو قطر متجانس صرف کا معلوم ہو سکتا ہے
 بوسیہ کیچنی خط ف ر کی متوازی ص م کی اور اب قطع کرو
 ف = ۲ ف ر تو دھ قطر متجانس صرف کا ہوگا اور اگر خط
 مستقر المقات معلوم ہوں تو اس طرح برعکس کیچ سکتا ہے قطع کرو
 ص ط = ۲ ص ر اور ملاؤ خط ف ط کا تو یہ ماس مطلوب ہوگا
 اگر مقام نقطہ آتشی کا معلوم ہو تو طول قطر متجانس کا مساوی اس
 عمود کے ہوگا جو کہ کیچا جاوے نقطہ آتشی سے خط مستقر المقات پر۔ مث
 (۲۱۶) دریافت کرو مساوت ماس ط ف کی جبکہ محور اسکی خطوط مستقر
 المقات ہوں فرض کرو کہ لا اور دوتر نقطہ ف کی ہیں اور لا
 اور گوتر ایک اور دوسری نقطہ خط منحنی کے ہیں
 : کو = لا اور گ = لا : لا - لا = لا - لا : لا - لا = لا - لا
 : کو - کو = لا - لا (لا - لا) مساوت سیکنٹ کی ہے۔
 اور اب فرض کرو کہ لا = لا تو مساوت ماس کی یہ ہوگی
 کو - کو = لا - لا (لا - لا) = لا - لا یعنی لا کو + کو لا
 = لا کو = ۲ کو یہ مساوت ماس کے مساوت خط منحنی سے
 منحل سکتی ہے (مساوت خط منحنی کی لا = کو یا لا + لا = کو ۲)
 لکھو اس مساوت میں متواتر لا اور لا بجای لا کی تو ہر پر کہ
 وہ مساوت ماس کی ہوگی فرض کرو کہ کو = ۰ : ص ط = لا =

ک = ک + ع جس ر اور لا = لا + ع جم ر اور جبکہ لکھیں گے ہم

ان قیمتوں لا اور ک کو مساوت خط منحنی میں جو کہ یہ ہے

$$ط^۲ - ص^۲ لا = ط^۲ ص^۲ \text{ تو حاصل ہو گا یہ}$$

$$ط^۲ (ک + ع جس ر) - ص^۲ (لا + ع جم ر) = ط^۲ ص^۲ \text{ نیز}$$

(۲۲۰) فرض کر دو کہ مرکز قطب ہی تو لا = ۰ اور ک = ۰

$$\frac{ط^۲ (ک + ع جس ر) - ص^۲ (لا + ع جم ر)}{ط^۲ ص^۲} = \frac{ط^۲ (ک + ع جس ر) - ص^۲ (لا + ع جم ر)}{ط^۲ ص^۲}$$

(۲۲۱) فرض کر دو کہ قطب نقطہ آتشی سے ہی تو ظاہر ہی کہ ک = ۰

اور لا = ط ی اور اب ع نق ہو جاوے گا جبکہ لکھیں ان قیمتوں کو

اور عمل کریں موافق (۱۸۸) کے تو حاصل ہو گا یہ

$$\text{نق} = ط - س جم ر = \frac{ط (ک - لا)}{۱ - ی جم ر} \text{ اور اگر زاویہ } ۱ \text{ س ف} = ر \text{ تو}$$

$$\text{نق} = ط - س جم ر = \frac{ط (ک - لا)}{۱ + ی جم ر} \text{ اس مساوت کا اکثر استعمال کرتی ہیں یہ صورت}$$

مساوت آئندہ کسی باسانی ثابت ہو سکتی ہے نق = ی لا - ط شکل (۱۹۱)

$$= ی (ط ی - ی جم ر) - ط = \text{نق} = \frac{ط (ی - ۱)}{۱ + ی جم ر} \text{ نیز}$$

$$(۲۲۲) \text{ اگر } \frac{۱}{۲} = ط (ی - ۱) \text{ تو } \frac{۱}{۲} = ۱ + ی جم ر$$

س ف اور اگر خط س ف خط منحنی سے نقطہ ف پر ہی ملی تو سطح

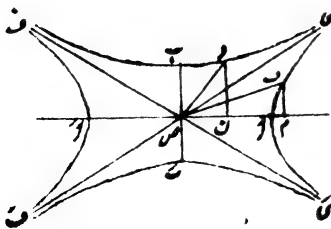
$$\text{س ف اور س ف} = \frac{۱}{۲} (ف س + س ف) = \frac{۱}{۲} \text{ ف و س}$$

طول وتر جو کہ نقطہ آتشی سے گزری = ۲ ص ۱ جہاں کہ ص نظر اوس سے

بیان کعبید البیضوی متجانس کا نیز

(۲۲۳) واضح ہو کہ سادہ بعید البیضوی ایک اور طرح کی بیضوی
 ہی اور اس کا اب ہم بیان کر چکی اگر $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})$ منفی فقرہ (۱۰۳)
 میں فرض کیا جاوے تو صورت سادہ کی یہ ہو جاوے گی کہ $ق = ل = ا$
 یا $ط = ۲ - ص = ل = ط$ جبکہ $ف = \frac{1}{2}$ اور $ق = \frac{1}{2}$ اب اگر
 دریافت کیا جاوے کہ مقام اس خط منحنی کا تو ظاہر ہوگا کہ $ب = ۲ - ص$
 محور کلاں اس خط منحنی کا ہی اور ۲ یا ۲ قطر متجانس اس کا ہی اور
 یہ بیضی معلوم ہو جاوے گی کہ خط منحنی دو نواظف نقطہ $ب$ کی اور $ب$ کی لپٹا
 پہنچتا ہے یعنی اسکی صورت مثل بعید البیضوی کے ہے جس کا ابھی ہم بیان
 کر آئی ہیں لیکن مقام اس کا مختلف ہے اسکی مقام سی دو نواظف خط منحنی
 شکل آئندہ سی معلوم ہو جاوے گی اور محور ایک کا انہیں سے قطر متجانس
 دوسری کا ہی اور صورت سادہ اتو نسی ظاہر ہوگا کہ دو نواظف خط منحنی
 خطوط مستقیم المقات $ی$ $ص$ $ی$ اور $ف$ $ص$ $ی$ ہیں

(۲۲۴) فرض کرو کہ $ف$ $ص$ اور $ص$ $د$ دو قطر متجانس بعید البیضوی



اور $ی$ کے ہیں

اب دریافت کیا

جاوے گی ہیں ہم

کو کس نقطہ دکھا

فرض کرو کہ $ص = ل$ اور $م = د$

۱۔ ص ن = لا اور ن د = کو تو ط^۱ - ص^۱ = ط^۲ - ص^۲
 ۲۔ لا^۱ + کو^۱ = لا^۲ + کو^۲ + ط^۲ - ص^۲ لیکن سادت ص^۱ و کی
 یہی ہے ط^۱ کو^۱ - ص^۱ لا^۱ = ۰ ∴ لا^۱ = $\frac{ط^۱ کو^۱}{ص^۱ لا^۱}$
 ۳۔ لا^۲ + کو^۲ = $\frac{ط^۲ کو^۲ + ص^۲ لا^۲}{ص^۲ لا^۲}$ کو^۲ = لا^۲ + کو^۲ + ط^۲ - ص^۲
 ۴۔ کو^۲ = $\frac{ص^۲ لا^۲}{ط^۲ کو^۲ + ص^۲ لا^۲ - (لا^۲ + کو^۲ + ط^۲ - ص^۲)}$ اور
 لا^۲ = $\frac{ط^۲ کو^۲}{ط^۲ کو^۲ + ص^۲ لا^۲ - (لا^۲ + کو^۲ + ط^۲ - ص^۲)}$ جبکہ لکھیں ہم ان
 قیمتوں کو اس سادت ط^۱ کو^۱ - ص^۱ لا^۱ = ط^۲ ص^۲ تو جدتخل
 کی حاصل ہو گا یہ ط^۱ کو^۱ - ص^۱ لا^۱ = ط^۲ ص^۲ اب ثابت ہو کہ
 کو کس نقطہ کا بعید البیضوی متجانس سی - یہاں سی معلوم ہو کہ
 صرف علامت بدلنی مقدار مقررہ سی جو کہ سادت بعید البیضوی میں
 جگہ کر نقطہ شروع ہو ہیں سادت بعید البیضوی متجانس کی حاصل
 ہو گی جسکے محور لا اور کو ہونگی مساویتین دو نو خطوط مسخ کے سادت
 آئندہ میں داخل ہیں (ط^۱ کو^۱ - ص^۱ لا^۱) = ط^۲ ص^۲ یا لا^۱ کو^۱ = کو^۲

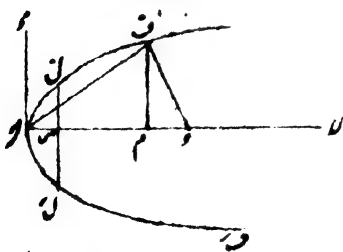
باب دہم

قریب البیضوی کے بیان میں

(۲۲۵) سادت قریب البیضوی کی جسکی محور متقاطع علی القوام ہیں یہ
 ثابت ہوئی ہے ط^۱ کو^۱ - ص^۱ لا^۱ = ۰ اب ہم پوسیدہ سادت راہم

خواص اس خط منحنی کے ثابت کریں گے۔ فرض کرو کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ۔
 ۱۔ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ فرض کرو کہ آلفظ شروع محور ON اور OL کا
 اوسط ہر ہی کہ اگر $LA = 1$ تو $OL = 1$ یہاں سے معلوم ہوا کہ خط منحنی
 نقطہ شروع سے گزرتا ہی۔ اسی پر ایک مثبت قیمت LA کی دو قیمتیں OL کی
 ایک مثبت اور دوسری منفی حاصل ہوئی جو کہ LA سے OL زیادہ
 ہوتی جاوے گی جیسا کہ LA سے OL نہایت زیادہ ہوتا جاوے گا یہاں سے
 معلوم ہوا کہ اس خط منحنی کی دو قیمتیں OL اور LA ہوتی ہیں
 اور OL کی دو طرف LA نہایت پہلے ہیں اور یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے
 کہ یہ خط منحنی دو طرف محور LA کی مشابہ ہے اور اس کی طرف محور
 کی طرف پھری ہوئی ہے ہین تو ایک خط مستقیم اس خط منحنی کو ایک نقطہ
 سے زیادہ بر قطع کرے گا سادہ گزشتہ سے ظاہر ہے کہ واسطہ ہر ایک
 منفی قیمت LA کی قیمت OL کی ناممکن ہے۔

(۲۲۶) واضح ہو کہ نقطہ OL کو اس خط منحنی کا کہتی ہیں اور OL اور LA



کو کہتے ہیں لیکن اکثر صرف

محور OL ہی کو محور قرار دیتے ہیں

کا کہتی ہیں اور سادہ

اس خط منحنی کی جبکہ اس

نقطہ شروع اور OL اور LA محور ہوں یہی $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ہے اس سادہ کی

دسیدسی ثابت ہونہی کہ مربع وتر کا = سطح وتر العرض اور ایک مقدار
مقررہ کی یعنی مربع وتر کا کم یا زیادہ ہونا موقوف ہے وتر العرض پر
(۲۲۷) خواص اخیر اس خط منحنی سے معلوم ہونہی فرق در میان
اس خط منحنی اور بعید البیضوی کی - شاخین ان دونوں کی لائہائیت پہنچتی
ہیں لیکن مختلف خواص کی ہیں کیونکہ مساوت بعید البیضوی کی یہی

$$r = \frac{1}{2} (a - b) = \frac{1}{2} (a - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a$$
یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ
ہر ایک بڑی قیمت a کے $\frac{1}{4}$ کم و زیادہ ہوتا ہے موافق a کے یا بدلتا ہے
موافق a کے یہاں سی ثابت ہوا کہ شاخ بعید البیضوی کی جلدی سی ملند
ہوتی جاتی ہے نسبت قریب البیضوی کے جسکا وتر کم و زیادہ ہوتا ہے موافق
 a کی جسکے قیمت a کی بہت بڑی ہوگی تو رستہ بعید البیضوی کا تقریباً مثل
اس خط منحنی کے ہوگا $r = \frac{1}{2}a$ لیکن قریب البیضوی میں a کی زیادہ
ہونی سی قیمت a کی بہت زیادہ نہیں ہوتی ہے اس سی معلوم ہوتا ہے کہ
قریب البیضوی تقریباً میدان متوازی ہونی کا اثر a سے رکھتا ہے -
(۲۲۸) محور کلان بیضوی کا لائہائیت بڑا فرض کیا جاوے تو مساوات
قریب البیضوی کی مساوت بیضوی سی باسانی حاصل ہو سکتی ہے فرض
کر دو کہ r مرکز اور s نقطہ آتشی اس بیضوی کا ہی جسکی مساوت
یہی ہے $r = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ (۱۰۵) فرض کر دو کہ $m = 1$ اس

$$= r - s = s - r = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$$
 دیکھو... شکل (۱۰۶) کو

وسیدہ سی سادہ قریب البیضوی کی بہت آسانی سے مل ہو سکتی ہے اور
عمل میں بوسیدہ لکھنی $m = n$ بہت اختصار ہو تا ہے بغیر دور
ہوئی عمومی اس سادہ کی تو اب ہم صورتیں آئندہ کی ثابت کرنی
میں اس سادہ کا استعمال کر سکتی ہیں اس طرح ہر کہ جس جابجائی مقدار m کی ہوگی
وہاں $n = m$ کی لکھیں گے اس سادہ جوں سادہ کہ بعد اس عمل کی حاصل
ہوگی اوس میں اجزاء وتر آتشی اعظم کے باقی جاویں گی ۔

(۲۳۰) دریافت کرو مقام اوس وتر کا جس کا دو چند سادہ مقدار
وتر آتشی اعظم کے ہو فرض کرو کہ $52 = m$: $16 = n$ یا

$$16 = m : 2 = n \text{ محور آتشی سے قطع کرو اس } m =$$

اور نقطہ s میں سے گزرتا ہو کہ نیچے وتر sl کا جو وتر آتشی اعظم اور
تر نقطہ آتشی ہوگا مقام نقطہ s کا بطور آئندہ کی بھی دریافت ہو سکتا ہے
فرض کرو کہ $km = la$ اور $m = r$ اور ملاؤ خط rk کو اور کہنیچو

خط rk کا عمود rf پر تو اب ظاہر ہے کہ $om : m :: f : m$ د

$$m : d = \frac{r}{o} = m : r \text{ :۔ } m = \frac{1}{o} m$$

(۲۳۱) چاہتی ہیں ہم دریافت کرنا اوس فاصلہ کا جو کہ واقع ہے درمیان
آتشی اور ایک نقطہ f کے جو کہ خط منحنی پر ہے - فرض کرو کہ $sf = n$ تو ہم

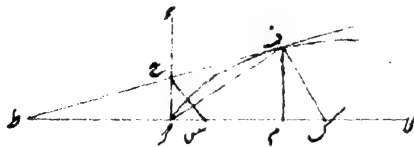
$$= la \text{ اور } m = r \text{ اور ظاہر ہے کہ اوفاں نقطہ } s \text{ کی } r = 0 \text{ اور}$$

$$la = m : n \text{ :۔ } n = (o - r) + (la - la) = r + (la - m) = 2$$

$$۳م ل + (ل - م) = ۲(ل + م) = ۲ \therefore \text{نق} = \text{مرف} = ل + م$$

ماس کے بیان میں

(۲۳۲) جاہتی میں ہم دریافت کرنا سادہ ماس کی جو ایک نقطہ
 ف (لا اور ک) قریب البیضوی پہنچی جاوے طے ہر ہی کہ سادہ اس
 سیکٹ کی جو دو نقطوں خط منحنی (لا اور ک) اور (لا اور ک) میں
 سی گذرنا ہی یہ ہوگی $ک - ک' = \frac{ک' - ل}{لا - لا'} (لا - لا')$



اور سادہ قریب البیضوی کی یہ سی ک' = سم لا اور ک' = سم لا
 $\therefore ک - ک' = سم (لا - لا')$ اور $\frac{سم}{ک + ک'} = \frac{سم}{لا - لا'}$ جبکہ کہیں ہم
 سادہ گذشتہ میں نو سادہ سیکٹ کی یہ ہو جاوے گی
 $ک - ک' = \frac{سم}{ک + ک'} (لا - لا')$ اور جبکہ دو نقطہ ایک دوسری بر منطبق
 ہو گئی تو $ک = ک'$ اور اس صورت میں سادہ سیکٹ کی سادہ ماس کہ ہو جاوے گی
 کیوچے $ک - ک' = \frac{سم}{ک + ک'} (لا - لا')$ یا $ک - ک' = سم (لا - لا')$
 $\therefore ک = ک' + سم (لا - لا') = سم ل + سم (لا - لا')$
 $\therefore ک = سم (لا + لا')$ واضح ہو کہ یہ سادہ ماس کی سادہ قریب
 البیضوی سے حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ $ک = سم ل = سم (لا + لا')$

یا م ق قطع کری خط منحنی کو خط ق پر تو س ق = لا + م (۲۳۱)

م ق = س ق

(۲۳۶) دریافت کر دہ نقطہ جہاں کہ یہ خاص مماس تقاطع کرتا ہے

محور لاسی فرض کر د کہ ۱ = ۰ ∴ لا = ط = م = - س

نقطہ ط س کی پہنچ خط ط ر کا عمود لولا پر اور نقطہ ق س کی پہنچ خط ق ر کا

متوازی آلا کے تو ق ر = ط + ۱ م = م + لا = س ق واضح ہو

کہ ہمیں اس میں قیمت لا کی بغیر لحاظ علامت کی لکھی ہے یہاں ہی معلوم ہوا

کہ فاصلہ کسی نقطہ ق کا نقطہ س سے مساوی خط ط ر کی ہی یہ خط ط ر

کا خط بنیادی قریب البیضوی کا کہلاتا ہے کیونکہ بوسیلہ معلوم ہونی اس

خط کی اور مقام نقطہ آتشی کے قریب البیضوی باسانی کہج سکتا ہے یہاں

محور لاسی زاویہ ۵۴° کا بناتا ہے (۳۵ مثال سوم) ش ش

(۲۳۷) چاہتی ہیں ہم دریافت کرنا طول عمود س ع کا جو کہ کہیا گیا ہے

نقطہ آتشی س سے مماس ق ط پر موافق صورت (۲۸) کی ظاہر ہے کہ

س ۱ = - ۱ - ط لا - ص $\frac{1}{2ط + 1ص}$ لیکن دیکھنی شکل (۲۳۲) کی معلوم

ہوگا کہ ۱ = ۰ اور لا = م اور نقطہ س کے ہیں اور

۱ = ط لا + ص مساوت خط ط کی ہی اور مساوت آئینہ بھی خط ط

کی ہے ۱ = ۲ (لا + لا) ∴ ط = ۲ اور ص = ۲ م لا

اسیو خط

$$\frac{م^۲ (ل + م)}{۲ م م + ۲ م م} = \frac{م^۲ (ل + م)}{۲ م م + ۲ م م} = \frac{م^۲ (ل + م)}{۲ م م + ۲ م م}$$

$$م^۲ (ل + م) = م^۲ (ل + م) \quad \text{اگر س ف = نق یہاں سے معلوم ہوا کہ}$$

$$\text{مربع س د} = \text{سطح س ف اور س ر یعنی س د} = \text{س ف} \times \text{س ر}$$

(۲۳۸) دریافت کرو کہ کس کج شکل گزشتہ میں سادہ ماس ف ط

$$\text{کی موافق شکل (۲۳۲) یہ ہے کہ} \quad \frac{م^۲}{۲} (ل + ل) \quad \text{تو اب ظہر ہی کہ}$$

سادہ خط س د کی چونکہ گزشتہ ہی نقطہ (م اور ل) میں سے اور عمود ماس

$$\text{ف ط پر ہی یہ ہوگی} \quad \frac{م^۲}{۲} (ل - م) \quad \text{معلوم کر دہ نقطہ جہاں کہ یہ}$$

خط تقاطع کرتا ہی محور د کو اسی وسطی واسطے ثبوت اس دعویٰ کے فرض کرو کہ

$$ل = ۰ \quad \therefore \quad \frac{م^۲}{۲} = ۰ \quad \text{لیکن اسی نقطہ پر ماس نقطہ ف کا محور د کو}$$

تقاطع کرتا ہی (۲۳۲) یہاں سے ثابت ہوا کہ ماس اور عمود نقطہ س د ہی اس

ماس پر محور آ س د ہی ایک ہی نقطہ بر ملتی ہیں یا کہ کس د کا محور د کا ہی

(۲۳۹) دریافت کر دہ نقطہ جہاں کہ عمود س د تقاطع کرتا ہی خط

$$\text{بنیادی کو وسطی ثبوت اس دعویٰ کے فرض کرو کہ} \quad ل = ۰ \quad \therefore \quad \frac{م^۲}{۲} = ۰$$

$$\frac{م^۲}{۲} (ل - م) = \frac{م^۲}{۲} (-م) = -\frac{م^۳}{۲} \quad \text{لیکن یہ یعنی} \quad \frac{م^۳}{۲} = م ف \quad \text{تو دریا}$$

ہوا کہ اگر ایک ماس کہیں جاد کسی نقطہ ف سی تو عمود کہیں گیا نقطہ اتنی

س سے اس ماس پر تقاطع کریگا خط بنیادی کو اس نقطہ پر جہاں کہ

ایک عمود کہیں گیا نقطہ ف سی خط بنیادی کو کا تا ہی

(۲۴۰) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ مماس نقطہ آتش کے فاصلوں سے بنا

ہی ظاہر ہے کہ مساوات مماس نقطہ کی یہی ہے کہ $\frac{م^۲}{ک} = (لا + لا')$

اور سادہ فاصلہ نقطہ آتش کی سطح سے نکلی جو کہ نقاط سے (= اور م)

اور ف (= لا اور ک) یکساں گذرتا ہے یہی ہے کہ $\frac{ک}{لا - م} = (م - لا)$

اور مس مس ف ط = مس (ف س لا - ف ط لا) =

$$\frac{م^۲ - لا^۲}{ک - لا^۲} = \frac{ک - م^۲}{ک - (لا - م)^۲} = \frac{\frac{م^۲}{ک} - \frac{ک}{لا}}{\frac{م^۲}{ک} + 1} =$$

$$\frac{\frac{م^۲}{ک}}{\frac{م^۲}{ک} + 1} = \frac{ک - م^۲}{ک - (لا - م)^۲} = \frac{ک}{لا} = \frac{م^۲}{ک} = \frac{م^۲}{ک} = \frac{م^۲}{ک} = \frac{م^۲}{ک}$$

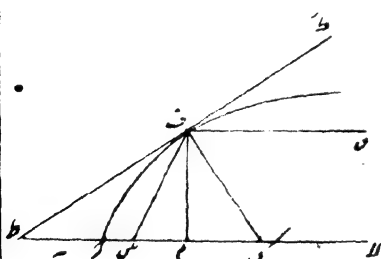
لیکن م ف = م ط × مس ف ط

$$\frac{ک}{لا} = م ط × مس ف ط$$

∴ مس ف ط = مس س ط

مس ط ف = یہ لوٹ

سیج ہی جبکہ خط ف کا



ستواری لڑا کی کھینچا جاوے تو اب ثابت ہوا کہ زاویہ جو کہ مماس فاصلہ آتش

یعنی س ف سسی بناتا ہے مساوی اوس زاویہ کی ہے جو کہ یہی مماس بناتا ہے

اوس خط سے جو کہ کھینچا گیا ہے نقطہ سسی ستواری منجور لا کی

یہ شکل مشہور اور مفید بطور آئندہ کی بوسلہ فقرہ (۲۳۳) کے ثابت ہو سکتا

ہی معنی اس فقرہ میں ثابت ہوا ہے کہ قیمت لڑا بجز لڑی ط علامت کی نظر آتا

ہی ثواب ثابت ہوا کہ $س ط = س ر + ا ط = م + لا = س ف$
 اسی واسطے زاویہ $س ف ط =$ زاویہ $س ط ف =$ زاویہ $ق ف ط$
 ظاہر ہے کہ اگر ایک کمر سمت $ق ف$ میں قریب البیضوی پر گری تو یہ کمر
 بسبب برابری زاویہ $ق ف ط$ اور $س ف ط$ کی اس نقطہ قریب البیضوی
 منعکس ہو کر نقطہ $س$ پر آدگی اس طرح تمام کمرین جو کہ متوازی محور $لا$ کی
 قریب البیضوی پر واقع ہوں تو یہ تمام کمرین نقطہ $س$ پر اگر جمع ہوں گی
 اگر ایک قریب البیضوی محور $لا$ کی گرد بہر کر ایک مجوف خالی شیشہ بنادی تو تمام
 کمرین جو کہ متوازی محور $لا$ کی اس شیشہ پر گر سکیں وہ نقطہ $س$ پر جمع ہو گئی
 مثلاً اگر ایک قریب البیضوی کی صورت کا شیشہ طرف آفتاب کی سطح سے
 رکھا جائے کہ محور قریب البیضوی کا مقابل آفتاب کی ہو تو ایک بڑی روشنی
 نقطہ آتشی $س$ پر جمع ہو گئی۔ برعکس اسکی اگر ایک روشن جسم نقطہ
 آتشی پر رکھا جائے تو مجموعہ کانون روشنی کا بجای بل تریمی سے پسینی کے اس
 سمت میں جادہ پگنی جو کہ متوازی محور کی ہو اور اس طرح سے روشن کر گیا ایک شے
 فاصلہ کی چیز جو کہ مقابل سمت کی ہیں اس واسطے اکثر روشن خانون میں ایسی
 صورت کی شیشوں کو استعمال میں لائے ہیں۔

عمودماس کے بیان میں

(۲۴۱) دریافت کرو مساوت عمودماس فک کی جو کہ عمود نقطہ
 ف (لا اور ڈ) سے ماس پر کھینچا گیا ہے ظاہر ہے کہ مساوت اوس خط

کی جو کہ نقطہ سے گزرتا ہے یہ ہے $د - ک = ط (لا - لا)$ اور
 چونکہ یہ خط عمود ماس برہی جسکی مسادہت یہ ہے $د = ط (لا + لا)$
 تو $ط = د - ط$ اسبواسطے مسادہت عمود ماس کی یہ ہوگی
 $د - ک = د - ط (لا - لا)$

(۲۴۲) دریافت کردہ نقطہ جہانکہ عمود ماس تقاطع کرتا ہے محور
 لا سی - فرض کرو کہ $د = ط$ $لا - لا = م$ یعنی خط باطن مساوی
 نصف وتر آتشی اعظم کے ہے اسبواسطے $سک = م + م$ کہ
 $لا = م + م = لا + م = س ف$ اور $ک = م + م = م + م$
 $لا = م + لا = م + م = م + م = م + م$ یہاں سے معلوم
 ہوا کہ خط ف وسط فی النسبت ہی در میان وتر آتشی اعظم اور خط س ف کے

قطرون کے بیان میں

(۲۴۳) فقرہ (۱۱) میں بیان کیا گیا ہے کہ مرکز قریب البیضوی کا
 نہیں ہوتا ہے - چونکہ واسطی ایک قیمت لا کے دو قیمتیں مثبت اور منفی
 د کی حاصل ہوتی ہیں تو اب معلوم ہوا کہ محور لا کا قطر قریب البیضوی
 کا ہی لیکن محور د کا قطر نہیں ہو سکتا ہے اسبواسطے محور اسکی قطر متجانس
 نہیں ہیں - واضح ہو کہ یہ خط منحنی لا نہایت قطر متوازی محور کی کہتا ہے
 واسطی ثبوت اس دعوی کے فرض کرو کہ $د = ط + لا$ مسادہت کسی
 ایک وتر کی ہے اور $د = ن لا$ مسادہت خط منحنی کی ہے اب بدلو

نقطہ شروع کو نقطہ تنصیف (لا اور د) دتر پر تو صورتیں مساوی ہوں گے۔
 کی بیحد جاو سکی۔ $د = ط + لا$ اور $(د + د) = ۲ = ن$ (لا + لا) اب معلوم
 کر دہ نقطہ جہاں کہ دتر قطع کرتا ہی خط منحنی کو واسطی ثبوت اس مطلب کے لکھو ط لا
 بجای د کی مساوت دویم میں $ن = ۲ (ط + لا) = ن$ (لا + لا) یا
 $ط + لا = ۲ (ن - د) = ۲ ن - ۲ د$ ۔ چونکہ نقطہ شروع نقطہ
 تنصیف دتر پر ہی تو دونوں قیمتیں لا کی مساوی ایک دوسری کی ہو گئی اور علامت
 ان دونوں کی مختلف ہو گئی یعنی علامت ایک کی مثبت اور دوسری کی منفی ہو گئی
 اسی واسطی دوسرا جز دتر گذشتہ کا مساوی صفر کی لکنا جاوے گی اسی واسطی
 $ط + لا = ن$ ۔ بوسیله اس مساوت کی قیمت د کی معلوم ہو جاوے گی اور
 چونکہ اس میں مقدار مقررہ یعنی د نہیں باقی جاتی ہے اس واسطی یہ ایک
 سی ہوگی واسطی کسی ایک دتر کی جو کہ متوازی $د = ط + لا$ د کی ہی پہانسی
 ثابت ہوا کہ $د = ۲$ تمام متوازی دتروں کی نقاط تنصیف کو کسی
 اور خط پر ہی کہ یہ مساوت ایک ایسی خط مستقیم کی ہے جو کہ متوازی محور کی ہے
 (۲۲۴) تبہ ہر ایک اس مساوت کو ایک اور ایسی مساوت ہی جس کا نقطہ شروع
 اور سمت محوروں کی مختلف پہلی سے چوتھی صورت مساوت میں کسی نوع
 کا فرق نہ آوی دھن کر د کہ $ط + لا = ج + د$ اور
 $د = ص + لا$ جس ر + د جس ر (۵۷) لکھو ان قیمتوں کو اس مساوت میں
 $ن = ۲$ لا تو بعد علی الترتیب لکھنی تو ای لا اور د کی حاصل ہو گا یہ

$\text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) + \text{لا}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) + \text{لا}^{\text{ا}} \text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) + \text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) = ۰$ اور چونکہ صورت اسکی
 مثل مساوت (و = ن لا) ہوئی چاہی اسی واسطے فرض کر دو کہ
 $\text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) = ۰$ (۱) اور $\text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) = ۰$ (۲)
 $\text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) = ۰$ (۳) اور $\text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) = ۰$ (۴)
 اسی واسطے صورت مساوت گذشتہ کی یہ ہوگی
 $\text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) + \text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) + \text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) = ۰$ اور چونکہ
 $\text{و}^{\text{ا}} (\text{جس ر}^{\text{ا}}) = ۰$

(۲۴۵) جبکہ امتحان مساوت (۱) اور (۲) اور (۳) اور (۴) کا
 کیا جاوے تو (۱) سی یہ معلوم ہوتا ہے کہ نسی محور لا کا متوازی محور لا کی
 اور چونکہ مساوت (۱) سی دریافت ہوتا ہے کہ تر مساوی صفر کی ہی تو مساوت
 (۲) کی جاتی رہی یعنی = کی ہوگی تو اب نین مساو این باقی رہیں اور
 چونکہ جابر مقدارین مجہول ہیں تو اب ثابت ہوا کہ لا نہایت ایسی نقاط ہو سکے
 ہیں کہ جن پر اگر مساوت گذشتہ کا لفظ شروع بدلا جائے تو صورت مساوت
 کی ویسی ہی رہی گی یعنی اسپین کی طرح کی تبدیلی نہیں ہوگی باقی تین مقدارین
 ط اور ص اور ر کو کسی ترتیب سے تو نتیجہ ادنیٰ ایک ہی حاصل ہونگے
 مثلاً فرض کرو کہ ط مقدار معلوم ہے تو مساوت (۴) سی یہ حاصل ہوگا
 $\text{ص} = \text{ط} \text{ن}$ اس مساوت سے معلوم ہوتا ہے کہ ط کو آ سی مثبت سمت

کی طرف شمار کرنا چاہی اور نیا نقطہ شروع کسی نقطہ ف خط منحنی پر ہو
 جیسا کہ شکل آئندہ میں ہے اور مساوت (۳) سے یہ حاصل ہوگا

$$\text{مس} = \frac{ن}{ص} = \frac{ص}{ط} \text{ کیونکہ مساوت (۴) سے } ن = \frac{ص}{ط}$$

$$\text{مس} = \frac{ص}{ط} = \frac{ص}{ص} = ۱ \text{ لیکن یہ بعینہ قیمت اوس زاویہ کی ماس}$$
 کی ہے جو کہ ماس ف ط بنانا ہی محور لا سی (۲۴۰) یہاں سے دریافت ہوا
 کہ نیا محور د کا ماس خط منحنی کا نئی نقطہ شروع ف جی آپ تمام اس
 بیان سے شرطیں آئندہ حاصل ہو گئی نیا نقطہ شروع کسی نقطہ ف خط
 منحنی پر ہی (دیکھو شکل آئندہ کو) نئی محور دجین ف لا متوازی لا
 کی اور دوسرا ف د ماس سے نقطہ شروع ف پر ہی اور صورت
 مساوت سے دریافت ہوتا ہے کہ نیا محور لا کا قطر قریب البینوی کا ہی
 (۲۴۶) ظاہر ہے کہ مساوت خط منحنی کی $ن = \frac{ص}{ط} = (ص \div ط) = ن$
 جبکہ $ن = \frac{ص}{ط} = ن$ (کٹ ر) $ن = (۱ + م) = ن$
 $ن = (۱ + \frac{ط}{ص}) = ن + ط = م = (ن + ط) = م$ (۲۴۷) سے ف (۲۴۸)
 یہاں سے معلوم ہوا کہ نیا وتر آتشی نقطہ ف پر $ن = م$ ف
 (۲۴۹) مساوت قریب البینوی کی جبکہ معلوم ہو مقام اور سمت ہی محور
 کی باسانی اصلی مساوت سے جس کے محور متقاطع علی القوایم ہیں حاصل ہو سکتی
 واسطہ ثبوت اس دعوی کی فرض کرو کہ ف نقطہ شروع ہی اور ف لا
 اور ف لا نئی محور اور زاویہ لا = ر اور م = لا اور ن = م

$\text{نق} \times \text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ تو اب ثابت ہوا کہ
 $\text{نق} = \text{نق}$ \therefore تو اب معلوم ہوا کہ وہ وتر جو کہ نقطہ آتشی سے گزرتا
 (ساوی ہدف سے) کی ہی اور یہی مساوی اوس قطر آتشی ہے جو کہ نقطہ آتشی
 سے کہیجا جاوے۔ تو اب عموماً دریافت ہوا کہ اگر نقطہ ق کا نقطہ شروع
 اوتار کا فرض کیا جاوے اور اگر محور زمین سے ایک قطر اور دوسرا مساوی خط
 منحنی کا نقطہ ق پر ہو تو ذرا آتشی نقطہ ق کا وہ وتر ہوگا جو کہ نقطہ آتشی
 میں سے گزرتا ہی۔

(۲۴۹) ظاہر ہے کہ مساوت اوس مساوی کی جو کہ نقطہ ق (لا اور د)
 سے کہیجا جاوے اور جس کے کہنی محور ف لا اور ف و ہیں یہ ہوگی
 $\text{نق} = \text{نق}^2$ (لا + لا) فرض کرو کہ $\text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ لا یہاں
 معلوم ہوتا ہے کہ حفظ بائیں = دو گنی وتر العرض کی ہے اور اب فرض کرو کہ
 $\text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ وتر کی لکھو بجائے کہ کی
 تو ہمیں حاصل ہوگی مساوت اوس مساوی کی جو کہ کہیجا جاوے دوسری انجام ق
 وتر ق و سے تو اب باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر دوسرا مساوی دواخی ہو
 ایک وتر سے کہیجا جاوے تو وہ اوس وتر کی قطر زمین کے - تر
 (۲۵۰) اگر دوتر ق و کا نقطہ آتشی سے گزرتا ہے کہ شکل میں ہے تو وتر
 نقطہ ق کی یہ ہوگی کہ $\text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ اور لا = ف = س ف
 $\text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$ $\therefore \text{نق} = \text{نق}^2$

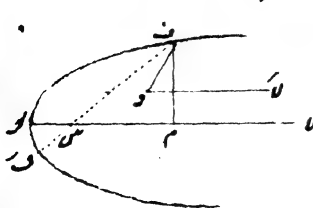
دو = $\frac{1}{2}$ (لا + لا) یہ ہو جاوے گی کہ لا + نق اس طرح سے ہو
 ایک کچھ نقطہ ق می کچھ جاوے یہ کہ لا + نق اور یہ خط محور ق
 سے فاصلہ - سی پر نقطہ ق سی ملتی ہیں یعنی اگر دو ماس ایک دتر آتے
 کے دوسروں سے کچھ جاوے تو وہ خط بنیادی پر ملے گے اور زاویہ جو کہ
 درمیان ان دو ماسوں کے واقع ہی صورت آئندہ سے حاصل ہو سکتا ہے

$$\text{مس} = \frac{(ط - ط) (جس ک)}{(ط + ط) + (جس ک)} \dots \dots (۵۱)$$

$\frac{(1+1)}{1+1} = 1$ جس کے کیونکہ $ط = 1$ اور $ط = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ مس = ۹
 یہاں سے دریافت ہوا کہ اگر دو ماس ایک دتر آتے کی دو دوسروں سے کچھ
 جاوے تو وہ خط بنیادی پر ملے گا ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں۔

مسادات قطبی کے بیان میں

(۲۵۱) دریافت کرو مسادات قطبی قریب البیضوی کی فرض کرو کہ دتر
 نقطہ ق کی لا اور ق مین اور فرض کرو کہ زاویہ پیمائش کیا جاتا ہے
 خط ق سے جو کہ متوازی محور خط منحنی کے ہی تو اب بوسیہ (۶۱) کے
 یک شکل خط منحنی کے وسیلہ سے ثابت ہو سکتا ہے کہ $لا + ع = لا + ع$ جس سے اور



$لا + ع = لا + ع$ جم رہے جبکہ کل مین ہم
 ان قیمتوں لا اور ق کو مسادات
 آئندہ مین $لا = ن$

تو حاصل ہو گا یہ

$$(د + ع جبر) = ن (لا + ع جبر)$$

(۲۵۲) فرض کرو کہ قطب ایسا نقطہ ہو کہ خط منحنی پر واقع ہو

$$ن + د + ع جبر + ع (جبر) = ن + لا + ع جبر$$

$$ع (جبر) = ن جبر - د جبر کیونکہ د = ن لا$$

$$ع = \frac{ن جبر - د جبر}{(جبر)}$$

اور اگر اس خط منحنی کا قطب فرض کیا جائے

$$تو د = ۰ \quad ع = \frac{ن جبر}{(جبر)}$$

(۲۵۳) فرض کرو کہ نقطہ آتشی سے قطب ہی د = ۰ اور لا = ن

اور صورتیں ع نقی ہو جاویگا ایسویں صورت سادہ عام کی جو کہ یہی

$$(د + ع جبر) = ن (لا + ع جبر)$$

$$ن (جبر) = \frac{ن}{ن} + ن جبر یا ن (جبر) + ن جبر = ن (جبر)$$

$$\frac{ن}{ن} + ن جبر + ن جبر = ن (جبر) \quad \therefore \frac{ن}{ن} = ن (جبر)$$

$$\therefore ن = \frac{ن}{ن} + ن جبر یا ن = \frac{ن}{ن} - ن جبر$$

صورت میں جو سید فقرہ (۲۵۱) کی یہی حاصل ہو سکتی ہے فرض کرو کہ

$$زادہ اس ف = ر تو ن = م ف = م ف + م ف =$$

$$م ف + م ف = م = \frac{ن}{ن} - ن جبر \quad \therefore ن = \frac{ن}{ن} + ن جبر$$

(۲۵۴) اگر ف سے خط منحنی سے نقطہ ف پر ہی ملی تو ہمیں حاصل ہوگا

$$م ف = \frac{ن}{ن} \times (جبر) = \frac{ن}{ن} \times (جبر) + ن جبر = ن جبر$$

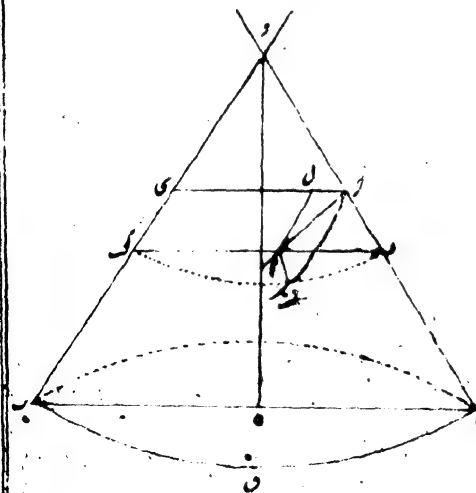
$$تو اب ثابت ہوگا کہ م ف = م ف اور م ف = \frac{ن}{ن} \times (جبر) =$$

$$\frac{N}{M} = \left(\frac{N}{M} + \frac{N}{M} \right) = \frac{N}{M} + \frac{N}{M}$$

باب یازدهم

تراشہا، محزو طی کی سیانین

(۲۵۵) واضح ہو کہ تین خط منحنی بیضوی اور بعید البیضوی اور قریب البیضوی پہلی مخروط کی تراشنے سے حاصل ہوئی تھی اسی واسطے انکو تراشنے سے پہلے مخروط کی تراشنے میں اب ہم بیان کر نیکی خاص ترکیبیں مخروط کی قطع کرنے کی اور ان سے دریافت ہو گا کہ اگر مخروط کو ایک طرہ سے کاٹیں تو حاصل منحنی ان خطوط میں سے پیدا ہوتا ہے۔ واضح ہو کہ گردش کر کے ایک مثلث قائمہ الزاویہ سے گردش کر کے ایک مثلث عمود کے مخروط پیدا ہوتا ہے۔ مثلاً خط وہ جس کے گردش کر کے مثلث مذکور پیدا ہوتا ہے۔

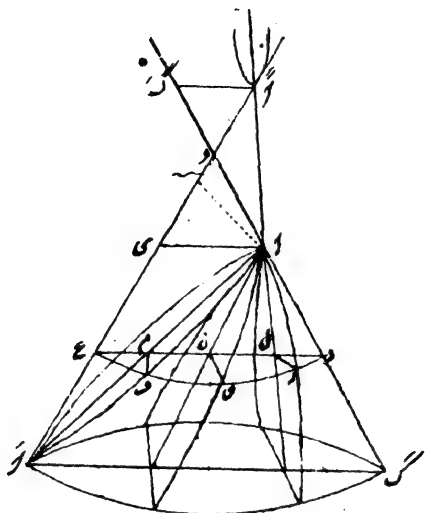


محفوظ پیدا کر لیا جس کے راس اور محور وہی بڑی جڑ کہ سب سے محض وہ کی تہہ پر رک

ہر ایک نقطہ وتر مثلث قائمہ الزاویہ کا وقت گردش کی ایک دائرہ پیدا کرتا ہے
یہاں سے معلوم ہوا کہ قاعدہ مثلث کا حرکت کرنی سے ایک سطح دائرہ بناتا ہے اور اسکو
قاعدہ مخروط کا کہتے ہیں اور تراشوں کو جو کہ پیدا ہوتی ہیں ایک ایسی سطح سے
جو اس مخروط سے شروع ہو کی محور میں گزرتی ہے عمودی تراشیں کہتی ہیں
اور طائرانی کہ ان تراشوں سے مثلث پیدا ہوتی ہیں اگر ایک سطح مخروط کی
کسی سمت میں گزری تو وہ تراش جو کہ اس سطح کی گزرنی سے پیدا ہوگی تراش
مخروطی کہلاتی ہے خواص اور خطوں کی جو کہ اس سطح کی تراشنے سے پیدا ہوگی
مختلف موافق مختلف مقام سطح مذکور کی ہو گنا اب ہم بیان کریں گے کہ کس
قسم کے خطوط منحنی کو ایک خاص تراش تعلق رکھتی ہے اور یہ بھی لکھیں گی کہ
ایک خاص قسم کی خطوط منحنی ایک خاص تراشنے والی سطح سے پیدا ہوتے ہیں
(۲۵۶) فرض کرو کہ دب قس ایک مخروط ہے اور د راس اور دہ
محور اور ب س ق قاعدہ اور ف دہ خط ہے جو کہ سطح تراشنی والی اور
سطح مخروط کی منی سے پیدا ہونے والی اور دہ نقطہ خط منحنی کا ہے جو تمام نقطوں
خط منحنی سے نزدیک تر راس د کی ہے فرض کرو کہ دب س ر ایک ایسی
سطح عمودی ہے جو کہ گزرتی ہے مخروطہ میں سے اور عمود تراشنی والی سطح ف دہ
پر ہے اور ر م جو کہ مقام تقاطع ان سطحوں کا ہے ایک خط مستقیم ہے اور اسکو
محور تراش مخروطی کا کہتے ہیں کیونکہ خط منحنی مشابہ دو طرف اس خط کے ہے
فرض کرو کہ ک ف د ایک تراش متوازی قاعدہ کے ہے اور طائرانی کہ تراش

دایرہ ہی اور خط ک ف د جو کہ تقاطع کرنی اس سطح اور سطح دب ہ س کی
 سی پیدا ہو ہی قطر اس دایرہ کا ہی۔ چونکہ سطح ک ف د اور تراشنی والی
 سطح ف ل م دو نوعہ سطح دب ہ س پر مبنی تو خط م ف جو کہ تقاطع کرنے
 پہلی دو سطح سی پیدا ہو تا ہی عمود سطح دب ہ س پر ہو گا (موافق ایک شکل
 ۱۱ مقالہ کے) اور اسیو سطحی یہ خط عمود ہو گا تمام اون خطوں پر جو کہ اس
 سطح میں اوپر سے ملین گی اسیو سطح خط م ف کا عمود خط ک د اور ل م پر
 ہو گا فرض کرو کہ زاویہ دوم کا جو کہ در میان خط ل و اور ل م کے ہی
 $= ط$ اور فرض کرو کہ زاویہ اول $= م$ اور کچھ خطاری کا متوازی
 خط ب ہ کی اور م ل متوازی دب کی اور فرض کرو کہ زاویہ اول $= لا$
 اور م ف $= ر$ اور ل و $= ۱$ تو اب موافق خاصیت دایرہ کی راجع ف م
 سطح ک م اور م د کی اور م د $= \frac{۱ \text{ وجہ اول}}{\text{جس م د}} = \frac{لا \text{ وجہ ط}}{\text{جس م د}}$ اور
 ک م $= ۱ - ۱ - ۱ = ۱ - ۱ = ۱$ وجہ دوی $۱ - ۱ = ۱$ وجہ اول $۱ - ۱ = ۱$ لیکن زاویہ
 دوی $۱ = ۹۰ - ۹۰ = ۰$ اور اول م $= ۹۰ + ۹۰ = ۱۸۰$ اگر ہم کینچن م ل کو
 بیان تک کہ ملی خط ل و سی تو خطاری کہ ل م ل $= ۱۸۰ - (ط + م)$
 تو اب ثابت ہو کہ ک م $= ۱ - ۱ = ۱$ وجہ (ط + م) $۱ - ۱ = ۱$ اسیو سطح
 $۱ = \frac{لا \text{ وجہ ط}}{\text{جس م د}} \left\{ ۱ - \frac{۱ \text{ وجہ م}}{\text{جس م د}} - \frac{لا \text{ وجہ (ط + م)}}{\text{جس م د}} \right\}$
 $۱ = \frac{۲ \text{ وجہ ط}}{\text{جس م د}} \left\{ ۱ - \frac{۱ \text{ وجہ م}}{\text{جس م د}} - \frac{لا \text{ وجہ (ط + م)}}{\text{جس م د}} \right\}$ چونکہ

چونکہ یہ سادات دوسری درجہ کی ہیں تو معلوم ہوگا کہ تراشہای محو و علی مساوی
 درجہ دوم سسی تعلق رکھتی ہیں جبکہ مطابق کرین کی ہم اس مساویات کو مساوی
 آئندہ سسی $\Delta = \Delta + \Delta$ جو کہ تعبیر کر لگی بیضوی یا قریب بیضوی
 یا بعید بیضوی کو جبکہ Δ مساوی ایک مقدار منفی یا صفر یا مثبت کی فرض کیا
 جاوے تو معلوم ہوگا کہ مساویات گذشتہ تعلق رکھتی ہیں بیضوی یا قریب بیضوی
 یا بعید بیضوی سسی جبکہ مقدار جس $(\Delta + \Delta)$ مثبت یا صفر یا منفی فرض
 کی جاوے گی اور داسطی ثبوت ان صورتوں کے اب ہم فرض کر لیں گے کہ تیشی والی
 سطح حرکت کرتی ہو کر نقطہ آ کے اسطرح برکہ قیمتین Δ کی سسی زیادہ
 ہوتی جا لیں ۱۸۰ کت - - - - -
 (۲۵۷) فرض کرد کہ $\Delta = 0$:: $\Delta = 0$ اور $\Delta = 0$ یہ سادات
 اوس خط مستقیم کی ہیں جو کہ محور لا کا ہی یہ شکل سے بھی ظاہر ہو جائے گی کہ
 جب $\Delta = 0$ تو اس صورت میں تراشہ تیشی والی سطح صرف مخروط سسی نہیں
 کرتی ہیں اس لیے اس مقام خط Δ کا آو ہو جاوے گا -



(۲۵۸) فرض کرو (ط + م) کم ہی ۱۸۰ سے تو اس صورتیں خط منحنی
بسیضوی ہو جاوے گا چونکہ اب شکل مرقومہ بالا میں دونوں زاویہ \angle دسی اور
دوسرے کی ۱۸۰ سے کم ہیں اسبواسطے خطوط دسی اور \angle م نقطہ \angle پر
ملیں گے یا تراشیں والی سطح قطع کریگی مخروط کے دونوں ضلعوں کو۔

(۲۵۹) فرض کرو کہ \angle مرکز بسیضوی کا ہی قباب \angle م = $\frac{1}{2}$ \angle دسی اور
 \angle د = $\frac{1}{2}$ \angle \angle م = مربع محور عود کا = سطح دسی اور \angle \angle اور جبکہ
کہیں گے ہم دو عمود نقاط \angle اور \angle سے \angle پر تو مربع محور عود کا
= مربع \angle + سطح دسی اور \angle \angle فاصلہ در میان نقاط \angle کے
= ک \angle اگر خط مستقیم \angle کا کہیں جادے بنا تا ہوا ایک زاویہ ہی \angle کی
= زاویہ ہی \angle تو خط \angle خط بنیادی تراش مخروطی کا ہوگا اگر

اگر یک دایرہ اندر مثلث $ااوسے$ کھینچا جاوے تو یہ مس کرے گا خط $اا$

سی تراش محزوطی کے نقطہ آتشی پر - θ θ θ

(۲۶۰) فرض کرو کہ $ط = ۹۰ - \frac{۱}{۲}م$ تو جس طرح $(ط + م) = ۱۰۰$ (جہ $\frac{۱}{۲}$)

اسی واسطی اس صورت میں جبکہ تراشنے والی سطح متوازی قاعدہ کی ہو

تو مساوات گذشتہ مساوات دایرہ کی ہو جاوے گی - θ θ θ

(۲۶۱) فرض کرو کہ $ط + م = ۱۸۰$ جس طرح $(ط + م) = ۰$

تو اب اس صورت میں خط منحنی قریب البیضوی ہو جاوے گا اور قطع کرنی والی

سطح حرکت کرتی ہوئی مقام $اا$ پر آ جاوے گی چونکہ اس صورت میں محزوط

$اا$ کا متوازی ضلع $اا$ محزوط کی $اا$ واسطی مساوات گذشتہ

مساوات قریب البیضوی کی اور صورت اس کی یہ ہوگی کہ $ط = ۰$ (جہ $\frac{۱}{۲}$)

اگر کہ کھینچا جاوے بنا تا ہذا زاویہ $اا$ = زاویہ $اا$ کہ تو اگر خط

بنیادی تراش محزوطی کا ہی اور وہ دایرہ جو کہ مس کرنا ہی خطوط $اا$

اور $اا$ اور $اا$ سی مس کرے گا خط $اا$ قریب البیضوی کے نقطہ آتشی پر

(۲۶۲) فرض کرو کہ $(ط + م)$ زیادہ ہی ۱۸۰ سی تو جس طرح $(ط + م)$

کی منحنی ہوگی اور خط منحنی مطلوب بعید البیضوی ہوگا اور قطع کرنی والی سطح

اس خاص صورت میں مقام $اا$ پر ہوگی اس صورت میں اگر خطوط $اا$

اور $اا$ کو بھی کسٹرف کھینچیں تو وہ بالضررہ نقطہ $اا$ پر ملیں گے یا قطع

کرنی والی سطح دو محزوطوں کی ملے گی اور خط منحنی کی دو شاخیں ہوگی

سندھ
 شاخ انین سی ہر ایک مخروط کی سطح پر بنی کی -

موازی بیضوی کی ثابت ہو سکتا ہے کہ مربع قطر متجاہد کا = سطح آبی اور اگر
 اور خط $اک$ فاصلہ درمیان دو نقطہ آتشی کے $ح$ اور $اک$ کہ خط بنیادی $ح$ اور
 وہ دایرہ جو کہ $م$ سے $ک$ تا ہی $اک$ اور $وا$ اور $اک$ سے $اک$ کو نقطہ آتشی
 پر سک کر لگیا -

(۲۶۳) واضح ہو کہ ہم $ط$ کی بھی مختلف قیمتیں فرض کر سکتے ہیں یا ہم اسکو
 اس طرح برتیر کر لیں کہ تراشنے والی سطح مخروط سی ملتی $ح$ ایک اور نقطہ $س$ اور
 نقطہ $اک$ کے مثلاً فرض کر دے کہ $ط = ۰$ تو $۰ =$ جس $ط$ جس $(ط + م)$ $لا$
 $(م + ط)$

جو کہ اس صورتیں جس $ط$ اور $(م + ط)$ مثبت ہیں تو اب ممکن ہو نامیت
 مساوت گذشتہ کا سو قوف ہو گا مقدار جس $(ط + م)$ بر

اگر $ط + م$ کم ہو ۱۸۰ سی تو اس صورتیں مقدار $(ط + م)$ کی نامکن ہو
 اور یہ مساوت صرف بطور آئندہ کی حل ہوگی $لا = ۰$ تو $۰ =$ تو اب

معلوم ہو کہ تراش مخروطی اس صورتیں ایک نقطہ ہی اور یہ صورت اس
 وقت حاصل ہوگی جبکہ تراشنے والی سطح اس مخروط سی اسطور پر گزری

کہ وہ متوازی $اک$ کی ہو - اگر $(ط + م)$ زیادہ ہو ۱۸۰

تو بہین حاصل دو ایسی خط مستقیم ہوگی جو کہ تقاطع کریں گے ایک دوسرے کو
 نقطہ شروع بر اس صورتیں قطع کرنے والی سطح نقطہ $د$ سی گذرتی ہوگی

متوازی خط $اک$ کے یکساں ہونے کے $ح$ اور تراش مخروطی اس صورت میں ایسی

دو خط مستقیم ہو گئے کہ ملین کے نقطہ و بر - ش - ش - ش
 (۲۶۴) بر قومہ بالاسی واضح ہو گا کہ تراشہاے مخروطی سات
 قسم کے ہیں نقطہ اور خط مستقیم اور دو خط مستقیم جو کہ تقاطع کرتی ہیں
 ایک دوسرے کو اور دائرہ اور بیضی اور بعید البیضی اور قریب البیضی یا تمام
 ایسی خطوط منحنی جو کہ مساحت درجہ دوم سی تعلق رکھتی ہیں مگر اولیٰ اختلاف
 کی سوای وہ خط متوازن کے جو صرف اختلاف قریب البیضی کا ہی -

واضح ہو کہ تینوں اضلاع تراشوں کو یعنی بیضی اور بعید البیضی اور قریب البیضی
 کو تراشہاے مخروطی کہتی ہیں اور بیان انکا اکثر ریاضی دانوں نے فلاحون
 کے وقت سے کیا ہے اور یہ خطوط منحنی افلاطون کے مدرسہ میں دریافت
 کی گئی تھی اور جبکہ اس کے شاگردوں کو اکثر خواص ان خطوط منحنی کے معلوم
 ہوئی تو انہوں نے بجز انکا استیصال کر کے اکثر کتابیں انکی باب میں
 چھپوائیں ان کتابوں میں سے وہ کتاب جو کہ ایونیر باشدہ پر گاتصیف کی ہے
 موجود ہے اسکی آئندہ باب میں چار آسان اور چار مشکل لیکن فی الحقیقت
 لایق مطالعہ کر سکے ہی اور مستفیدین نے ان خطوط منحنی کو بوسیله
 علم ہندسہ کی اس طرح لکھا ہے جس طرح کہ متاخرین انکو بوسیله مساواتوں

$$r^2 = n + \frac{n}{b^2} \quad \text{کی تعبیر کرتی ہیں}$$

$$r^2 = n - \frac{n}{b^2}$$

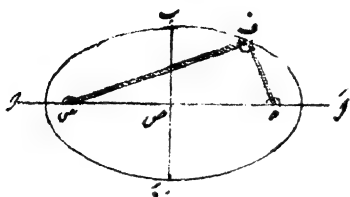
$$r^2 = n$$

بیان کینچنی تراشہ یا مخروطی کا بوسیدہ حرکت متواتر کی

(۲۶۵) واضح ہو کہ تراشہ های مخروطی صرف ریاضی ہی میں مفید نہیں ہیں وہ اکثر علوم اور فنون میں فایده مند ہیں اسبواسطے اب ہم بیان انکا تفصیل اور صحیح طور سے کرین گے واضح ہو کہ ہر ایک خط منحنی دو طور سے کھینچ سکتا ہے بوسیدہ ایک خاص ترکیب ریاضی کے یا بوسیدہ نقاط کی مثلاً پہلی ترکیب کے ایک دائرہ سے جو کہ کھینچ سکتا ہے بوسیدہ ایک خط پر کاری کی یا بوسیدہ ایک دوری کے جسکا ایک سرے بند ہوا ہو اور دوسرا سر اس حرکت کری کرے اور اس نقطہ کی اس قسم کی ترکیبیں جو کہ حرکت متواتر پر موقوف ہیں ہمیشہ کام میں ہی آتی ہیں سوای دائرہ کے کوئی اور خط ایسا سہل نہیں ہے کہ اس میں ایسی ترکیب جاری ہو سکے اسبواسطے ایسی خطوط منحنی کو نقاط کی وسیلہ دریافت کرتے ہیں یہ ترکیب استعمال میں آسکتی ہے بوسیدہ مساویہ خط منحنی اور بعض خواص بندہ سی کی جو کہ اس خط منحنی میں باقی جاتی ہیں جسکا کینچنا مطلوب ہے بوسیدہ اس ترکیب کی بہت سی نقاط خط منحنی کے معلوم ہو جاتی ہیں اور ان نقاط کو ایک مہین قلم یا آرمہ سی ملا کر خط منحنی مطلوب دریافت ہو جاتا لیکن ان نقاط کو بہت صفائی سے ملانا چاہئے اب ہم ترکیبیں ان خطوط منحنی کی کینچنی کے بیان کریں گے۔

(۲۶۶) کینچو اس سے بیضوی کو جس کے محور معلوم ہیں - فرض کر دو کہ

۱۱ اور بے محور میں نقطہ ب کو مرکز گردان کر کیچو ایک دائرہ جسکا



انصاف قطر مساوی ارض کے

ہو کا تھا ہوا ۱۱ کو نقطہ

س اور ہ میں ان نقاط

کو نقاط آتشی کہتے ہیں

تایم کرد و صحیح مقام س اور ہ میں فرض کرو کہ ایک مساوی دوری کا

نقطہ آ بری اور گزار دو مساوی دوری کا نقطہ ہ میں لاؤ اسے پہر نقطہ

آ پر اس طرح پر کہ دونوں سہری اس دوری کے اس نقطہ پر ملین اور دور آ کر

ہ اور آ کی مساوی دو جہزہ کی ہو۔ قائم میخ یا ایک تیز آلہ کو اس دوری

میں نقطہ آ پر اور پہر او اس دوری کو گرد نقاط س اور ہ کی اس طرح

کہ یہ دورا ہمیشہ تناہو رہی تو اب یہ میخ یا آلہ خط منحنی بیضوی کا بناؤ گا

مثلاً اگر دورا پہر تے ہوئی مقام ق پر آوی تو س ف + ہ + ہ = س = ۱۲

۱۱ + ۵ = ۱۶ س = س ف + ہ = ۱۱

(۲۶۷) ایک اور ترکیب کہیجئے اس خط منحنی کے بوسیدہ ایک بیضوی پر کا

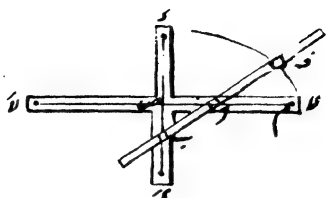
کی جسکو ٹریبل کہتی ہیں یہ ہے۔ فرض کرو کہ دوروں یا دو لکڑیوں سے

سوانہوں کے عمود ایک دوسری پر بن اور فرض کرو کہ ب ف ایک

تیسری لکڑی ہی قطع کر داسمیں سے بے مساوی نصف محور کلاں کے اور

اے مساوی نصف محور خورد کی اور فرض کرو کہ نقطہ ب پر ایک ایسی میخ ہی

جو کہ دو پر حرکت کر کے اسے اس طرح کی اور یہ نقطہ آبرہی اور جبکہ



حرکت کریں اگر دیکھ قلم کے جو کہ ف پر ہی تو ایک خط بیضوی کا پیدا ہوگا اور
مان لو کہ نقطہ ص پر محور متی ہیں اور ص م = لا اور م ف = ر و تر ف
کی ہیں کیسے جو خط بن کا متوازی خط ص م کے جو کہ ف پر خط ف م سے نقطہ ن
پر تو اب ظاہر ہی کہ م = ص م بن اور مربع ف = مربع م + مربع
یا ص م = م + ص م لا ۲ : ط م ۲ + ص م لا ۲ = ط م ۲

(۲۶۹) ترکیب آئندہ بھی بہت آسان ترکیب اسے کہیں بیضوی کی
فرض کر دو کہ لا ایک لکڑی ہی اور ص ع اور ک ع دو لکڑیاں ہیں بر ایک اینٹین
سی سادی نصف مجموعہ



محور کھان اور محور نو

کے ہر سینے

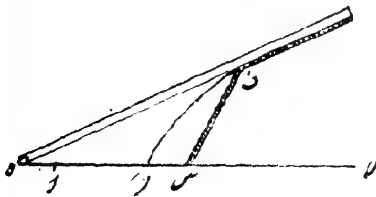
س ع یا ک ع = ط م + ص م جہاں کہ ط سادی نصف محور کھان اور ص
م سادی نصف محور نو کی ہی یہ دونوں کڑیاں نقطہ ع پر جو سیار ایک ہی

بندش کے عاقل بنے ہیں جو کہ آسانی حرکت کر سکتے ہیں۔ اور فرض کرو کہ
 ف ع = $\frac{ط-ص}{۲}$ اب اگر نقطہ ک کو خط لا آ پر حرکت دی جاوے تو ظاہر ہے
 کہ نقطہ ف خط بیضوی کا بنادیکھا کیجیو نمودار اور ف م س لا پر اور فرض
 کرو کہ س م = لا اور ف م = ک تو اب ظاہری کہ مربع ع ک = مربع
 + مربع دک لیکن ک ع : ک ف :: ع د : ف م یعنی $\frac{ط+ص}{۲} : \frac{ط-ص}{۲} :: ع د : ع$
 :: ع د = $\frac{ط+ص}{۲} \times \frac{ک}{ص}$ اور ظاہری کہ ک د : م د :: ک ع :
 ع ف :: ک د + م د : م د :: ک ع + ف ع : ف م یعنی لا : م د ::
 م د : $\frac{ط-ص}{۲}$:: م د = $\frac{ط-ص}{۲} \times \frac{لا}{ط}$ اور یہ بھی ظاہری کہ

$$ک ع : ف ع :: ک د : م د \text{ یا } \frac{ط+ص}{۲} : \frac{ط-ص}{۲} :: \frac{ک}{ط} \times \frac{ط-ص}{۲} : \frac{لا}{ط} \times \frac{ط-ص}{۲}$$

$$:: ک د = \frac{ط+ص}{۲} \times \frac{لا}{ط} = \left(\frac{ط+ص}{۲} \right) \times \left(\frac{ک}{ص} \times \frac{ط-ص}{۲} \right) + \left(\frac{ط+ص}{۲} \right) \times \left(\frac{لا}{ط} \right)$$

(۲۶۹) کیجیو خواجہ البیضوی کو بوسیدہ حرکت متواتر کے - فرض کرو کہ
 اور محور کھان بعید البیضوی کا ہی اور سہ فاصلہ درمیان نقاط انشی

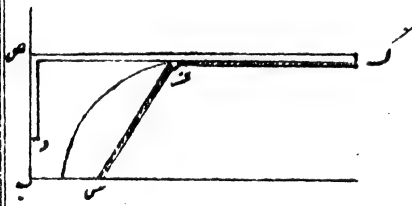


کی ہی اور ہ ف کہ
 ایک ایسی لکڑی ہو کہ
 نقطہ ہ پر حرکت
 کر سکتے ہیں اور ملاؤ

ایک دور درمیان نقاط کہ اور س کے مساوی کہ ہ - اور کی اور حرکت

دو لکڑی کہ ہ کو اس طرح پر کہ ڈور کہ قس کے ہمیشہ تن ہوئی رہی تو اب حرکت
نقطہ ق کی جہانکہ ایک قلم سرمہ کا لگا ہوا ہی خود بعید البیضوی کا نیچا کیونکہ اصل
تفریق خط ہ ق اور س ق کا ہمیشہ ایک سا رہیگا اگر طولی دور کا مساوی خط
ہ ک کی ہو تو نقطہ ق کے حرکت سے ایک ایسا خط پیدا ہوگا جو کہ عمود ہوگا
س پر۔ اور اگر دور از یادہ ہو خط ک سے تو اس صورت میں دوسرے
شاخ بعید البیضوی کی گرد نقطہ ہ کی بنی گے

(۲۷۰) کیونچہ خط قریب البیضوی کو بوسیدہ حرکت متواتر کے۔ فرض کرو کہ
س نقطہ آتش ہی اور ب ص خط بنیادی ہی رہو آگہ دھڑک کو جو کہ

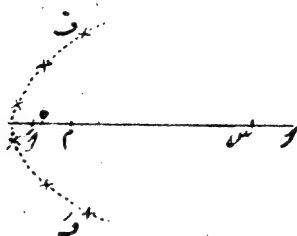


اکثر بڑھوین کے پاس
ہو تا ہی اور زمین لکڑی
ص ک عمود دوسری لکڑی
ب ص پر ہی اور ملا دیکھ

دور مساوی ک ص کے درمیان نقاط ک اور س کے اس طرح پر کہ وہ گذرے
نقطہ ق میں جہانکہ ایک قلم سرمہ کا لگا ہوا ہی اب حرکت دو ک ص کو
خط ب ص پر تو اب ظاہر ہے کہ اس حرکت سے نقطہ ق کا خط قریب البیضوی کا
بنادیکھا کیونکہ س ق ہمیشہ مساوی خط ص کے رہیگا جو کہ خط بنیادی ص
پر عمود ہی

(بیان بنانی تراشہای مخروطی کا بوسیدہ نقاط کے)

(۲۷۱) کیچو خط بیضوی کو بوسیدہ نقاط کی جبکہ محور اوسکے معلوم ہوں
فرض کرو کہ AA' محور کلاں ہی اور SS اور SS نقاط آتشی نقطہ S کو مرکز
گردان کے کیچو ایک دائرہ جسکا نصف قطر خط AM ہو جو کہ چوتھا خط AA'



سی سیطرہ سی

کیچو ایک اور

دائرہ جسکا

مرکز اور AM

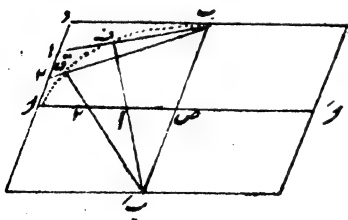
نصف قطر ہو اور فرض کرو کہ یہ دائرہ قطع کرتا ہی پہلے دائرہ کو نقاط

اور F پر تو اب ظاہر ہے کہ $SF + FM = SM = AA' = 2a$ تو اب

ثابت ہو کہ F ایک نقطہ خط بیضوی سیطرہ سی بہت نقاط معلوم ہو

ہیں جنکی ملانی سے خط بیضوی ملے گا۔

(۲۷۲) کیچو خط بیضوی کو جبکہ اوسکی افطار تجانس معلوم ہوں



فرض کرو کہ AA' اور BB'

افطار تجانس ہیں لہذا

میں سی کیچو خط AB کا

متوازی خط AC کے اور

نقطہ A میں سی کیچو خط AD کا متوازی خط AB کے تقسیم کرو دو خطوط

آد اور اوص کو مساوی حصوں میں مثلاً مساوی تین حصوں میں اور ملاؤ خطوط آد اور ب کو نقاط تقسیم آد میں اور آ اور ب کو نقاط تقسیم ص میں تو اب نقاط تقاطع ق اور ق کے نقطے خط منحنی کی ہو گئی واسطی ثبوت اس

دعویٰ کے فرض کرو کہ ص نقطہ شروع ہے اور اوص = ط اور

ب ص = ص ۱ تو اب ظاہر ہے کہ مساوی خط مستقیم ب ق کی یہ ہو گئی

۱- ص ۱ = $\frac{ص ۱}{ط ۳}$ لا اور مساوی خط مستقیم ب ق کی یہ ہو گئی

۲- ص ۱ = $\frac{ص ۲}{ط ۱}$ لا تو اب ظاہر ہے کہ حاصل ضرب اون راویوں

کی ماس کا جو کہ یہ خطوط محور لا سے بناتی ہیں = $\frac{ص ۱}{ط ۳} \times \frac{ص ۲}{ط ۱}$

= $\frac{ص ۱}{ط ۲}$ اور چونکہ یہ ایک مقدار مقررہ ہے اسی واسطے نقطہ ق کا

خط منحنی پر ہوگا (۱۴۱) اسی طور سے دریافت ہو سکتے ہیں لا نہایت

نقطے جن کی ملائی سے ایک خط بیضوی کا پیدا ہوگا

(۲۴۳) ترکیب آئینہ واسطی کیسے خط بیضوی کے بوسیدہ نقاط کی بہت خوب

اور آسان ہے

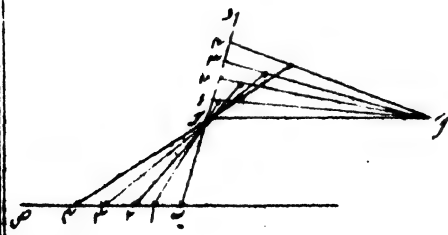
فرض کرو کہ

آد ایک قطر ہے

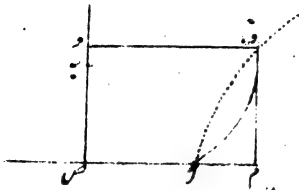
اور آ ب برابر

اور تنوازی قطر

متساوی بیضوی کے ہی نقطہ ب میں کسی کچھ خط ب ق کا تنوازی آد کی اور



(۲۶۵) کیچو خط بعید البیضوی سے مساوی القطرین کو بوسیہ نقاط کے فرض کر دو کہ ص ۱ اور ص ۲ مساوی محور میں کیچو خط ص ۱ ب نقطہ و تک نقطہ و کو مرکز گردانی کی کیچو ایک دائرہ جسکا نصف قطر و دہی کیچو خط



و ن کا عمود خط ص ۱

پر جو کہ قطع کرے گا دائرہ کو

نقطہ ف پر تو اب نقطہ و

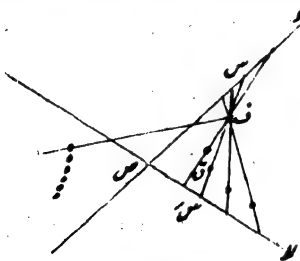
کا نقطہ خط منحنی مطلوب کا ہو گا۔ فرض کر دو کہ ص ۱ م = لا اور م ف = س

تو اب ظاہر ہے کہ مربع ص ۱ د = مربع و ۱ - مربع ص ۱ یا و = لا - ط

(۲۶۶) معلوم ہیں بین خطوط متفرق الملاقات ص لا اور ص ۱ اور

نقطہ و خط منحنی کا بناؤ خط بعید البیضوی کو بوسیہ نقاط کے

نقطہ و میں سے گذرے گا کیچو خط ص ۱ و ن کا جو کہ انجام ہو تا ہی خطوط متفرق



الملاقات پر خط ص ۱

میں و کا تو س ق = س ۱

تو اب نقطہ ق موافق نقطہ

(۲۶۷) کے ایک نقطہ خط

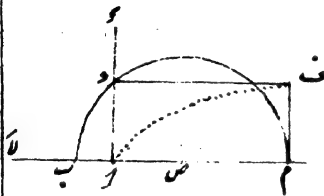
منحنی کا ہو گا اس سطر حسی بہت سی نقاط معلوم ہو سکتے ہیں جنکی ملانی س ۱ خط

منحنی پیدا ہو گا واضح ہو کہ سوائے معلوم ہوئی خطوط متفرق الملاقات ایک اور خط

معلوم ہونی چاہیے و اسی دریافت کرنے خط منحنی کے کیونکہ خطوط متفرق الملاقات

کی معلوم ہونی سی صرف نسبت محور و ن کے معلوم ہوتی ہی اور اس نسبت
سی محور دریافت نہیں ہو سکتے۔

(۲۷۷) بناؤ خط قریب البینوی کا بوسیدہ نقاط کے جب کہ وتر آتشی اعظم
ن معلوم ہو فرض کرو کہ لا اور آد محور متقاطع علی القواہم میں محور لا
میں سی کا ٹو اب = ن نقطہ ص کو جو کہ لا پر ہی مرکز کردا مرکز کچھ
دایرہ ب دم جہاں نصف قطر ص ب ہو تقاطع کرتا ہو محور کو نقطہ د پر
اور محور لا کو نقطہ م پر اب کچھ خط د ف اور م عمود خطوط آد اور لا
پر تو نقطہ ف کا خط منحنی پر ہو گا۔



فرض کرو کہ کم = لا اور

م ف = د کو اب ظاہر ہی

کہ مربع د = سطح اب اور ام

یعنی و = ن لا - ث ث

(۲۷۸) بناؤ خط منحنی کو جبکہ معلوم ہو زاویہ جو کہ درمیان محور و ن کی اور
ایک وتر آتشی ن کے واقع ہی فرض کرو کہ لا اور آد محور میں اور اب
وتر آتشی نقطہ ب میں سے کچھ ص ب متوازی خط لا کے اور نقطہ گ میں
سی گذر د ایک خط ک آ ف کا جو کہ قطع کرنا ص ب کو نقطہ ف میں
کا ٹو خط آد میں سی رد = ب ف اور کچھ خط د ع کا متوازی لا
کی جو کہ قطع کرنا ہی آگ کو نقطہ ع میں تو ب نقطہ ع نقطہ خط منحنی پر ہو گا۔

ی × فر : ۵ + ۲ (م - ۵) = ۲ (۱ + ی) (۱ + ی) ۲
 یا ۵ + لا - ۲ م + لا = ۲ م + ۲ ی م + لا + م ۲
 : ۵ + (۱ - ی) (۱ - ی) لا - ۲ م + لا (۱ + ی) = ۰ اور یہ مساوت اول
 خطوط منحنی کی ہر جو مساوت درجہ دوم سے تعلق رکھتی ہیں اب فرض کرو کہ ی
 کم ہو آسی : ۵ = (۱ - ی) (۱ - ی) { ۱ - لا - لا } جبکہ مطابق کریگی
 ہم اس مساوت کو مساوت بیضوی سے جو کہ یہی ۵ = ص ۲ (۱ - لا - لا) (۱ - لا)
 تو ۲ = ص ۲ - ی اور ۱ - ی = ص ۲ = ص ۲ (۱ - لا - لا) (۱ - لا)
 = ۲ + ی تو اب ثابت ہو کہ خط منحنی ایک ایسا بیضوی ہے جس کے محور ۱ - ی
 اور ۲ م × √(۱ + ی) / (۱ - ی) اب فرض کرو کہ ی زیادہ ہو آسی تو
 ۵ = (۱ - ی) (۱ - ی) { ۱ + لا + لا } تو اب ظاہر ہے کہ یہ مساوت بعید بیضوی
 کی ہر جسکی محور ۱ - ی اور ۲ م × √(۱ + ی) / (۱ - ی) ہونگی اور اب فرض کرو کہ
 ی = ۱ : ۵ = ۲ م لا یہ مساوت ایسی قریب بیضوی کی ہر جسکا دیر
 آتش اعظم نام ہے۔

(۲۸۰) چون کہ عام مساوت تراشہای محوڑی کی یہ ہے
 ۵ + (۱ - ی) (۱ - ی) لا - ۲ م + لا (۱ + ی) = ۰ تو اب ظاہر ہے کہ اگر کوئی
 بیضوی کا معلوم ہو تو وہ صورت بعید بیضوی یا قریب بیضوی میں ہی صحیح ہو سکتا ہے
 بوسیله ایک خاص تبدیلی قیمت می کے مثلاً مساوت عباس بیضوی کی کہ یہ ہے
 ۵ + (۱ - ی) (۱ - ی) لا - ۲ م + لا (۱ + ی) (۱ + لا) = ۰ تو مساوت عباس بعید

البیضوی کی یہ ہوگی کہ - (ی - ۱) لا لا - م (۱ + ی) (لا + لا) = ۰

اور مساوات قریب البیضوی کی یہ ہوگی کہ - ۲ - م (لا + لا) = ۰ اگر لکھیں

ہم بجای ص کے - ص تو اکثر خاصہ بیضوی کی جو کہ باب ہشتم میں دریافت کی گئی

خواص بعید البیضوی کے ہو جاوے گی اور یہی خواص قریب البیضوی ہو جاوے گی تبدل نقطہ شروع کی

راس بیضوی پر اور لکھیں - م کو بجائے ط اور م - ۱ + ی کو بجای ص کے اور

فرض کریں کہ ی = ۱ - مثلاً مساوت ماس بیضوی کے انجام و تراشی اعظم

پر جبکہ نقطہ شروع راس بیضوی کا فرض کیا جاوے یہ ہونی چاہیے

۱ + ی (۵ - ۷) (۱۱۴) یا ۱ = ط (۱ - ی) + ی لا لکھو بجائے

ط کے - م اور فرض کرو کہ ی = ۱ : ۱ = م + لا اور یہی فقرہ

(۲۳۵) میں بھی ثابت ہوا ہے - ٹ ٹ ٹ

(۲۸۱) اگر س ف = فنی اور اس ف = ر تو مساوت قطبی بنائی

حاصل ہو سکتی ہے کیونکہ س ف = ی × ف ر = ی (ط س + س م)

یا فنی = ی (م - ۱ + ی) - فنی (م - ۱ + ی) = فنی (م - ۱ + ی) اور جو

بیضوی اور بعید البیضوی میں م (۱ + ی) = ص ط اور یہ صورت قریب

البیضوی میں م = ۲ ہوتا ہے تو اب حاصل ہوگی (جبکہ لکھیں ہم لے لے

و تراشی اعظم کے) مساوت عام قطبی واسطے تینوں خط منحنی کے

ی = ۱ - ۱ + ی - (۱۵۰) ٹ ٹ ٹ

(۲۸۲) کیونکہ ایک ماس نقطہ ف سے جو کہ بیضوی پر واقع ہے دیکھو ثبوت

اسی واسطی ملاؤ خطوط س و ف اور ہ ف اوس شکل میں جو کہ اوس حاشیہ
میں جو صفحہ (۹۷) میں یہی کہی ہوئی ہے اور ہ ف میں سی قطع کرو ف کہ
= س ف اور ملاؤ خط س کہ تو خط ف جو تضیف کرتا ہی خط س کہ لا
ماس مطلوب ہوگا

(۲۱۶) کیچو ماس بعید البضوی ایک نقطہ ط سی جو کہ باہر اوس سی ہ
و و طریقہ جو کہ فقرہ (۲۱۳) میں واسطی بیضوی کی لکھی گئی ہیں اس خط
منحنی میں عل میں لانی جا ہی مگر کچھ تبدیلی شکل میں واقع ہوگی

(۲۱۷) کیچو ماس قریب البضوی کا ایک نقطہ معلوم ف سی جو کہ اوس پر
داخل ہے۔ واسطی ثبوت اس دعوی کی کیچو و ز ف م کا اس شکل میں جو کہ

فقرہ (۲۳۲) میں کہی ہوئی ہے اور کیچو محور اک کو اور کا ٹو اوس میں سے
ا ط = ا و اور ملاؤ ف ط تو یہ خط ماس مطلوب ہوگا موافق (۲۳۳)

یا قطع کرو س ط = س ف اور ملاؤ ف ط کو تو خط ط ماس مطلوب ہوگا
(۲۱۸) کیچو ماس قریب البضوی کا ایک نقطہ ط سی جو کہ اوس پر داخل نہیں

واسطی ثبوت اس مطلب کے کیچو قطر ط ف د ستوازی محور کے جو کہ قطع کرتا ہے
خط منحنی کو نقطہ ف پر اور کا ٹو ف و = ف ط اور کیچو و ز ف و واسطی

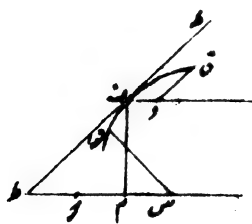
در العرض ف و کی تو اب ظاہری کہ موافق (۲۵۹) کے خط ط و اور
اور ط ماس مطلوب ہوگئی۔ اگر یہ خط معلوم نہ ہو اور اس کا خط بنیادی

اور نقطہ آتش معلوم ہو تو اس صورت میں نقطہ ط کو مرکز گردا کی کیچو ایک

دایرہ جب نصف قطر میں ہو تقاطع کرتا ہو خط بنیادی کو نقطہ ر اور پ
 ملاؤ خطوط رس اور رس کو اور کیچو خطوط ر ق اور ر ق متوازی محور
 کے ثواب خطوط ط ق اور ط ق جو کہ عمود خطوط رس اور رس پر ہیں
 ماس مطلوب ہوگی موافق (۲۳۹) کے

(۲۱۹) اگر ایک قوس ق ق ترائش مخروطی کی ایک سطح پر کیچی ہوئی
 ہو تو دریافت کرو کہ وہ کس خط منحنی سے تعلق رکھتی ہے اور معلوم کرو محور اور نقطہ
 آتشی اس ترائش کے کیچو خط ل گذرنا ہوا درمیان دو متوازی و ترون لے
 اور اس سطح ہی کیچو ایک اور خط ل گذرنا ہوا بیچ میں دو اور منولدی و ترون لے
 ثواب اگر خطوط ل اور ل متوازی آپس میں ہوں تو قوس مذکور قرین بیضوی
 سے تعلق رکھیں گے اور اگر وہ مجوف طرف اس خط منحنی کے ملین تو یہ قوس بیضوی
 سے تعلق رکھیں گی اور اگر وہ محدب طرف اس خط منحنی کی ملین تو یہ قوس بعد بیضوی
 سے تعلق رکھیں گی موافق (۱۳۰ اور ۲۳۳) کے

(۲۹۰) فرض کرو کہ خط منحنی بیضوی ہے اور وہ نصفہ جہانکہ خطوط ل اور ل ملتی



ہیں مرکز صہی اور
 فرض کرو کہ ق ق ایک
 قطری اور اس کا قطر
 شہانہ بنو آئینہ کا
 معلوم ہو سکتا ہے

خط ف کو قطر گردانے کیچہ دایرہ ف ب ف اور ملاؤ ر ق اور کیچہ
 پ د متوازی ر ق کے جو کہ ملتا ہی اوس خط سی جو کہ متوازی ف و کی ہی اور اگر
 ص مین سی کڈتا ہی تو اب ط ہر سی کہ خط ص د قطر تجانس ہی موافق
 (۱۳۶) کی۔ دہلی دریافت کرنے طول اور مقام محور د کے کیچہ خط
 ف ع کا عمود ص د پر اور کیچگی اسکو نقطہ ی تک قطع کرو ف ی = ص د
 اور ملاؤ ص ی اور تنصیف کرو ص ی کو نقطہ ہ پر اور ملاؤ ف ہ تو اب
 بوسیدہ شت ص ف ی کے ہمین حاصل ہوگی قیمت ضلع ص ی کے اجزا

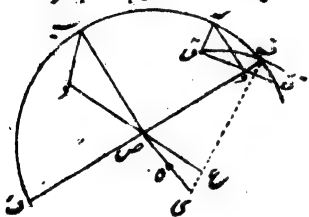
ص ف مین اور ص د = $\sqrt{\{ط^2 + ص^2 - ۲ ط ص اجس (ز-ر)\}}$
 $\sqrt{ط^2 + ص^2 - ۲ ط ص} = ط - ص :: ص = ط - \frac{ط - ص}{۲}$ اور
 بوسیدہ اسی شت کے ہمین حاصل ہوگا ف ہ = $\frac{ط + ص}{۲}$ تو اب
 یہاں سی معلوم ہوا کہ ف ہ + ہ ی نصف محور کلان ہی اور ف ہ - ہ ی
 نصف محور خوردھے - خط ف مین سے قطع کرو کہ = ہ ی تو ص کہ
 سمت محور کلان کی ہوگی - ش ش ش ش ش

(۲۹۱) اگر قوس ق ق ق قوس بعید البیضوی کی ہو تو واضح ہو کہ اس صورت
 مین ہی قطر تجانس اوس ترکیب سے دریافت ہوگا جو ابھی صورت بیضو مین لکھی
 اور اب خطوط متفرع المقات بوسیدہ نفرہ (۲۱۵) کی آسانی کیج سکتی ہیں
 اور سمت محور د کی تنصیف کرتی ہی اوس زاویہ کو جو کہ خطوط متفرع المقات
 آپس مین بناتی ہیں اور طول الکا دریافت ہو سکتا ہی بوسیدہ کیچنی فاس

فَظًا اور عمود فَم کے محور پر اور بسیلہ قطع کرنے صَو کے اسطرح برکہ دہ

وسط فی النسبت ہو در میان صم اور صط کے (۱۶۷)

(۲۹۶) اگر قوس مذکور قوس قریب البیضوی کی ہو تو کبھی طاق طاق ہو



ماورائے اورکھو خط و نس

بنیاداً ہوا زاویہ سرفط = زاویہ

طاف و لو یہی عمل کرو نقطہ

فمن اور من تقاطع کر گئی وہ نقطہ آتشیں ہوگا (۲۴۴) واضح ہو کہ

مجموعہ تنواری خط و د کے سی اور اس میں خط منحنی کا بوسیدہ کیلکینی عمود کا

محکم دلائل سے مزین متنوع و منفرد موضوعات پر مشتمل مفت آن لائن مکتبہ

(۲۹۳) اب ہم ختم کر سکی بحث تراشہای مخروطی کو بعد لکھنی شکل آئندہ کے

جو کہ بہت مفید ہے۔ اگر ایک نقطہ میں سے جو کہ اس پر یا اندر تراشیں محرومی کے

فرم کیا جاوے دو خط بنائی ہوئی ایک زاویہ لہجی جاوین بیان ملک کہ وہ ملین

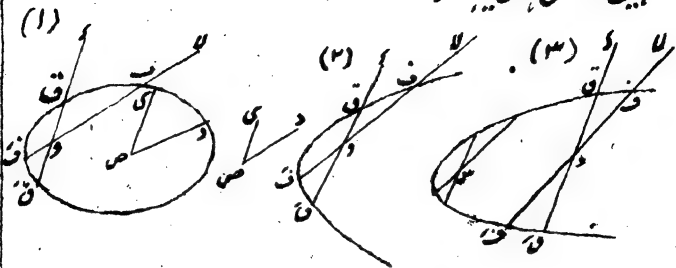
خط محمی سے اوسط ایک خط کی (جو کہ ضرب عدد و حصی ایک خط کی سی حاصل ہو)

ی) سطح دوسرے خط سے نسبت مقررہ (یہی ہے

[illegible]

ورق دی کے مرن اور ظہری کہ سوقت و تر متوازی انکی کہنچ ماہ دین

توهمین حاصل ہوگی یہ نسبت



سطح د اور ف : سطح ق و اور ق و :: مربع ص د : مربع ص ی
 فرض کرو کہ وہ نقطہ شروع ترجیحی محور وں دلا اور د کے کسی تو اب سادہ
 خط منحنی کی یہ ہوگی $د + ب + لا + س + لا + د + ی + لا + ف = ۰$
 فرض کرو کہ لا = ۰ : $د + ب + لا + د + ف = ۰$ اور چونکہ حاصل ضرب قیون
 سادہ ت کا ہی $\frac{ف}{س}$ اسی واسطے سطح ق و اور ق و = $\frac{ف}{س}$ اسی طرح
 ف و اور د ف = $\frac{ف}{س}$:: سطح ف و اور د ف : سطح اور د ف ::
 $\frac{ف}{س} : \frac{ف}{س} :: س : 1$ اور اب بدلہ نقطہ شروع کو مرکز پر بغیر
 جہانی سمت محور وں کے تو اب صورت سادہ ت کی یہ ہوگی
 $د + ب + لا + س + لا + د + ف = ۰$ (۸۱) فرض کرو لا = ۰

:: مربع ص ی : مربع ص د :: س : 1 اسی واسطے
 $\frac{ف}{س} = -$ اور مربع ص د = $-\frac{ف}{س}$

سطح ق و اور ق و : سطح ف و اور ف و :: مربع ص ی : مربع ص د
 شکل بعد البیضوی میں جو کہ (۸۲) اسی خطوط ص ی اور ص د خط منحنی سی

نہیں ملتی ہیں لیکن واسطی معلوم کرنے اس بات کی کہ یہ نصف قطر صحیح
کی ہیں حرکت دو محور کو یہاں تک کہ وہ قطر تجانس میں دکھایا جائے تو
ظاہری کہ صورتیں (۵۵) واسطی تبدیل محوروں کے جبکہ $r = 0$ اس صورت
کی ہو جائیگی $\omega = \omega_0$ اور $\lambda = \lambda_0 + \omega_0$ جس کے لیے
جبکہ لکھیں ہم ان قیمتوں λ_0 اور ω_0 کو سادہ گزشتہ میں یعنی اس سادہ
میں جس کا مرکز نقطہ شروع ہے اور فرض کریں کہ $b = 0$ واسطی تبدیل
کرنی اس سادہ کی اس سادہ سی جبکہ محور افطار تجانس میں تو اب
بعد اس تبدیلی کے صورت سادہ کی یہ ہو جائیگی

اور $\frac{1}{2}$ + س + لا + ف = اس میں مقادیر سے اور ق کی نہیں بدلی
اور - ف مساوی اس مریح کی جو کہ نصف قطر پہنچ سکتا ہے اور
یہ محو نہ ہر شمار کیا گیا ہے (۸۶) تو اب دعویٰ مرقومہ بالا صورت بعید
الیقین من بھی ثابت ہوا -

(۲) اب فرض کرو کہ تراش مخروطی قریب بیضوی ہے اور شکل لو کی (۳) سے
 بطور قوسہ بالا کے ہیں اس صورت میں ہی نسبت آئندہ حاصل ہوگی
 سطح ف و اور د ف : سطح و و اور و د :: س : ۱ اب فرض کرو کہ ف
 اور ق او تا آتشی و ترون و و اور و د کی ہیں بلو نقطہ
 شروع کو نقطہ آتشی پر لیکن سمت محور و کی ستوازی ف و اور و د کے
 رکھتی جا سٹی اس تبدیل سے مقادیر س اور و میں کسی طرح کی تبدیلی

ہین ہونگی اور چونکہ اس صورت میں اوٹار نقطہ آتشی سی گذرتی ہیں تو سطح
سطح ف س اور س ف : سطح ق س اور س ق :: ل ف : ل ق (۲۹۱)
اور چونکہ ف س اور س ف : سطح ق س اور س ق :: س : ۱ اور
سطح ف و اور ف و : سطح ق و اور ق و :: س : ۱ :: ف : ق
(۲۹۲) اگر نقطہ د کا باہر خطوط منحنی کے ہو اور نقاط ف اور ف
ایک دوسری پر منطبق اور سطح سی ق اور ق پر با خطوط مماس ہو جائیں
تو ہمیں صورت بیضوی اور بعید البیضوی میں یہ حاصل ہوگا

مربع دف : مربع و ق :: مربع ص و : مربع ص ی یا
دف : وق :: ص و : ص ی - قریب البیضوی کی صورت میں یہ
حاصل ہوگا مربع دف : مربع وق :: س ف : س ق یہاں تک معلوم
ہوتا ہے کہ اگر ایک کثیرالضلاع گرد ایک بیضوی کے کہیں جاوے تو حاصل
ضرب جبر یہ اسکی اجزائی بنادے گا سادی ایک دوسری کے ہیکہ اوپر ہی صورت
استعمال میں آگئی ہیں جبکہ مماس کہیں جاوین گرد ایک بعید البیضوی کے اور
جبکہ یہ مماس ایک نقطہ خطوط متفرقات سے مشابہ ہوئے ہوں - نیز

{ باب دوازدہم ان خطوط منحنی کے بیان میں جنگلی
مسافات کسی درجہ کی ہو یعنی زیادہ دو درجہ ہی ہو }

(۲۹۵) چونکہ بحث ان خطوط کی جنگلی مسافات دوسری درجہ کی تھی
تمام ہو چکی ہے اس واسطے اب ہم بیان ان خطوط کا کریں گے جنگلی مسافات

زیادہ دو درجے ہی چونکہ مساوت استی درجہ تک ہوتی ہے تو اس سے معلوم ہوتا
 کہ بحث کرنی ادنیٰ اس مختصر سا بیان ناممکن ہے علاوہ اسکی بیان کرنا انکا کچھ ضرور
 بھی نہیں کیونکہ اونسو سورت دنیوی میں کسی نوع کا فائدہ نہیں ہوتا ہی کیلین وہ
 ریاضی دان ہی کو خوب معلوم ہو گئی اور چونکہ تراشہ ہای مخروطی بہت فائدہ مند
 اسورت دنیوی میں معلوم ہو ہیں اسبواسطی ہستی بنیان انکا بخوبی کیا ہے۔
 چونکہ تحقیقات تیسری درجہ کی خطوط کی پہلی اسحاق نیوٹن کی تھی اسبواسطی
 وہ بہت مشہور ہوئی وہ خطوط تیسری درجہ کی مساوات سے تعلق رکھتی ہیں
 اسی قسم پر میں دو مین سب سے بہتر صورتیں اسحاق نیوٹن نے دریافت
 کی تھیں اور باقی آٹھ صورتیں بعد اسکی دریافت ہوئی ہیں جو اب علم کہ
 کہ انکا مطالعہ کیا جائے وہ انکو اسحاق نیوٹن یا سیرنگ کی کتاب میں
 دیکھ سکتا ہے جو تہی درجہ کی خطوط بانچ ہزار سی زیادہ ہیں اور تعداد زیادہ
 درجہ کی خطوط کی اس قدر ہے کہ ادنکا بیان کرنا اس سالہ مختصر میں ناممکن
 ہی چونکہ بیان کرنا تمام خطوط منحنی کا بہت مشکل ہے اسبواسطی ہم اس کتاب میں
 صرف اون خطوط کو لکھیں گے جو کہ بہت فائدہ مند ہیں اور جنکا جانا ضروری
 یعنی اون خطوط کو اس کتاب میں بیان کرینگے جو غیر متقطع ہیں یعنی جنکی منکوتا
 میں دو مسدود غیر مفرود بائی جاتی ہیں اور بعد اسکی لو کس ان سلواتو انکا
 دریافت کرکے اور انکی بعض ضروری خواص کو بھی لکھیں گے واضح ہو کہ کوئی
 خاص ترتیب واسطے معلوم کرے ان سوالوں کے فائدہ مند نہیں ہوگی اور

قواعد چوکہ واسطی دریافت کرنے کے سوالات منقطع کے بیان کی کمی میں
بیان بھی مفید ہو گئی اور حل کرنا سوالات منقطع اور غیر منقطع کا صرف تجربہ
پر موقوف ہی۔ واضح ہو کہ واسطی دریافت کرنے کے سوالات غیر منقطع کے ہم
ایک ہی قاعدہ نہیں لکھیں گے بلکہ مختلف طور بیان کریں گے تاکہ طالب علم کو مختلف
طریق واسطی نکالنے کے سوالات کی معلوم ہو جو جادین اب ہم بیان کرینگے ایسی
کو جنکا کوکس درجہ دوم سے تعلق رکھتا ہے۔

(۲۹۶) معلوم ہر خط اب (= ط) دریافت کر دو نقطہ جو کہ اس خط پر واقع

نہیں ہے جبکہ اوف : ب ف :: م : ۱

فرض کرو کہ آ نقطہ شروع ہے محور دن متقاطع علی القوائیم کا اور مان کو کہ

۱م = لا اور م ف = ۱ :: م ب = ط - لا اس واسطی

اوف : ب ف :: م : ۱ یا م (لا + ۱) :: ۱ (ط - لا) + ۱ :: م : ۱

:: لا + ۱ :: م (ط - لا) + ۱ :: م (۱ - م) + ۱ :: لا + ۱ :: م (۱ - م) + ۱

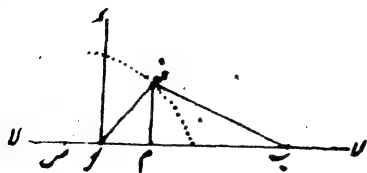
- م ط = ۱ :: لا + ۱ :: م (۱ - م) + ۱ :: م ط = ۱ :: م (۱ - م) + ۱

اس سادہ کے وسیلہ سے

لا نہایت ایسی نقاط معلوم

ہو سکتی ہیں جن کے وسیلہ سے

شرط اس سادہ کی پوری



ہو جاوے گی اور تمام یہ نقطہ محیط ایک دائرہ پر واقع ہو گئی ہوں گی (۲۹۶) کے

واسطے کیجئے اس دائرہ کی قطع کرو $\frac{لا}{لا - لا} = ۱$ سے $\frac{ط}{ط - ط} = ۱$ سے
نقطہ ص کو مرکز گردان کی کیجئے ایک دائرہ جسکا نصف قطر ص ہو یہی لوکس
مطلوب ہوگا اگر $م = ۱$ تو بوسیلہ سادہ اسے ایک کے یہ حاصل ہوگا
 $لا = ط$ اور یہ سادہ اس خط کی ہوگی جو کہ نقطہ تنصیف آب سے متوازی
اور کے کیجئے - $ن$ (۲۹۷) دریافت کرو لوکس ف کا جبکہ
کے کیجئے وہیں عمود نقطہ ف سے دو ایسی خطوط پر جسکا مقام معلوم اور فاصلہ
درمیان اول دو مقام کے جہاں کہ دو عمود واقع ہوتی ہیں مساوی مقدار متفرق
ہوگی - فرض کرو کہ نقطہ تقاطع خطوط معلوم کا نقطہ شروع محور و تقاطع
علی القوایم کا ہی اور مان لو کہ ایک ان خطوط میں محور لا ہی اور فرض کرو کہ
 $ر = ط$ لا سادہ دوسری خط کی متوازی سادہ اس خط کی جو کہ نقطہ ف
(لا اور $ر$) سے گزرنے کی عمود اس خط پر $ر = ط$ لا یہ ہوگی
 $ر - ط = ۱ - ط$ (لا - لا) بوسیلہ ان دو مساواتوں کے اوتار اون
نقاط کی جہاں عمود واقع ہوئی ہیں دریافت ہو سکتے ہیں اور اب مساوات اخیر
بوسیلہ فقرہ (۲۹) کے یہ حاصل ہوگی $ر + لا = ۱$ $\frac{ط + ط}{ط}$ یہ مساوات
دوسرے دائرہ کی جسکا مرکز نقطہ تقاطع ان خطوط کا ہی - $ن$ $ن$
(۲۹۸) فرض کرو کہ ایک خط معلوم ب سے حرکت کرتا ہی درمیان دو خطوط
آب اور اس کی اس طرح پر کہ انجام بے اور سے اس خط کی ہمیشہ خط آب
اور اس پر حرکت کرتے ہیں اب چاہئے کہ دریافت کیا اس خط منحنی کا

جو پیدا ہو گا حرکت کرنے نقطہ معلوم ف کی سسی جو ب سے پرواض ہو۔

فرض کرو کہ خطوط اب اور اس محور لا اور ک ہیں اور ام = لا اور

م ف = و اور ب ف = ط اور ف س = ص اور باق کو کہ زاویہ

ب کو س کا قایمہ ہی تو اب ام : ب ف :: م س : ف س یا

لا : ط :: م ص : و :: ص لا = ط ص - ط و

یا ط و + ص لا = ط ص اور یہ مساوات

ایسی بیضوی کی ہے جس کا مرکز نقطہ

آسی اور محور ط و اور م ص ہیں

اگر ایک زینہ ایسی دیوار کی

سہارا رکھا جائے جو عمود زمین پر ہی اب شکل گذشتہ سی ظاہر ہے کہ

اگر زینہ مذکور زمین پر سطح حرکت دین کہ اوپر کا سہارا دیوار ہی پر رہی تو

ہر ایک پایہ اس کا سوای بیچ کی پایہ کے ریع بیضوی کا بنادیکھا اور بیچ کا

پایہ ریع دائرہ بنادیکھا۔ اگر محور ترچی فرض کئے جا دیں اور درمیان

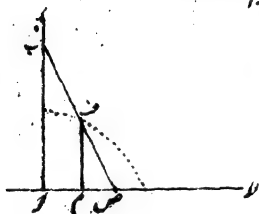
ادکی ایک زاویہ رکھا ہو تو اب = $\frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص}}$ و اور و ص = $\frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ط}}$ لا

اسوٹے $\text{ط} + \text{و} + \text{ص} + \text{لا} = \text{ط} + \text{ص} + \text{م} + \text{و} = \text{ط} + \text{ص} =$ اور یہ

مساوات بیضوی کی ہی موافق (۷۶) کے ظاہر ہے کہ بوسیدہ اس شکل کے ایک

خاص ترکیب واسطی کہچے بیضوی کے معلوم ہوتی ہے۔ اگر ایک خط ب سے

جس کا طول غیر منقطع ہے یعنی کم زیادہ ہوتا ہی خطوط اب اور اس پیدا

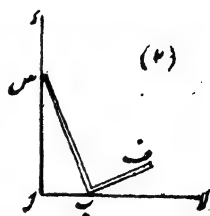
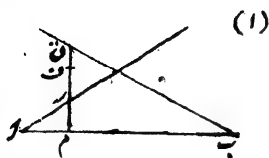


واضح ہو کہ بوسیدہ اس بعید البضوی کے ایک قوس دائرہ کو تین سادی حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ $ا ب$ ایک قوس دائرہ کی ہر حکمتیں حصہ سادی کرنے منظور ہیں وسطی ثبوت اس مطلب کے کہیچو ایک ایسا بعید البضوی $د ب$ جسکا اسی بیان ہوا ہے تو اب ہم کہتی ہیں کہ قوس $ب د$ کی تہائی قوس $ا ب$ کی ہی کیونکہ اگر فرض کریں ہم $د$ مرکز قوس نو کو کا تو $ا د ب = ۲ ا ب د = ۴ ا ب د = ۲ ا ب د$ یعنی قوس $ب د$ تہائی $ب د$ کے ہے

شکل مرقومہ بالا بطور آئندہ کے بھی ثابت ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ $ا ب = لا$ اور $م ف = ر$ اور زاویہ $ف ا ب = ر$ اسجو وسطی مس $ر = \frac{لا}{۲}$

اور مس $ا ب = لا$ لیکن مس $ا ب = ۲$ $\frac{۲}{۱} = \frac{لا}{۲}$ یا $لا = ۴$ $\frac{۲}{۱} = \frac{لا}{۲}$ واضح ہو کہ بعید نو کے دو طریقے مرقومہ بالا ایک ہی معلوم ہو گئی۔

(۳۰۰) سوالات آئندہ سادات درجہ دوم سے تعلق رکھتے ہیں یعنی سادات کی کو کس سادات درجہ دوم کی ہے۔ (۱) معلوم کرو کہ کس نقطہ کا جبکہ نقاط $ا$ اور $ب$ سی (جو معلوم ہیں شکل (۱) میں) دو خطوں کے کہیچو جادین جبکہ مقام معلوم ہو اور $م ر$ وتر مشترک ان دو خطوں کا ہو اور خط $م ف$ $م ر$ میں سے اس طرح کا $ا$ چاہی کہ وہ وسطی نسبت خطوط $م ا$ اور $م ر$ کا ہو



(۲) پس ب ف شکل (۲) میں ایک آلہ برہمی کا ادبہ اسطرح پر بنایا گیا ہے کہ
لکڑی ب س لکڑی ب ف پر عمود ہر دریافت کرد لو کس ف کا جبکہ ہم آلہ
حرکت کرنا ہی زاویہ قائمہ دولا میں اسطرح سے کہ نقطہ س ہمیشہ خط اول پر
حرکت کری اور نقطہ ب خط اول پر

(۳) اگر قاعدہ ایک مثلث اور حاصل تفریق دوزادیون کا جو کہ قاعدہ پر منتہی ہیں معلوم ہوں تو ثابت کر دو کہ لو کہ اس مثلث کا بعد البیضوی مساوی القطرین ہوگا۔

جس سے اگر دو عمود و دو خطوں مفروض پر کہنچی جا دیں تو وہ شکل چار ضلع کی جود
 ان عمودوں سے بنی گی مساوی ایک مربع مفروض کے ہوگی -

(۳۰۱) فرض کرو کہ Δ ایک بیضی ہے اور Δ محو کمان اور Δ ایک وتر او سکا ہے اور اب ملاؤ خط Δ اور Δ کو جو تعلق کرنا
ہیں نقطہ پر اب جانتی ہیں دریافت کرنا کو کس نقطہ کا

نقص کردگی سے نقطہ شروع محور و ن تقاطع علی القوائیم کا ہی بعد ص م = ۱۰

مسادات خطی کی یہ ہوگی کہ $\text{ص} + \text{لا} = \text{د}$ صورت اس مساوات کی نقطہ

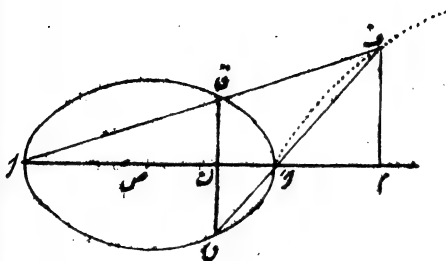
تو پر یہ ہو جاوے گی

$$\text{ص} = \text{د} - \text{لا}$$

$$\text{ص} = \text{د} - \text{لا}$$

نقطہ ق پر صورت

اسکی یہ ہو جاوے گی



$$\text{ص} = \text{د} - \text{لا} \quad \text{ص} = \frac{\text{د}^2}{\text{لا} + \text{ط}} \quad \text{یہاں سی ثابت ہوا کہ مساوات}$$

$$\text{ا} \text{ کی یہ ہوگی } \text{د} = \frac{\text{د}^2}{\text{لا} + \text{ط}} \quad (۱) \dots \dots \dots \text{اسی طرح مساوات}$$

$$\text{ا} \text{ کی یہ ہوگی } \text{د} = \frac{\text{د}^2}{\text{ط} - \text{لا}} \quad (۲) \dots \dots \dots \text{اور مساوات بیضوی کی}$$

$$\text{نقطہ ق پر ہوگی } \text{ط}^2 + \text{ص}^2 = \text{ا}^2 = \text{ط}^2 \text{ ص}^2 \dots \dots \dots \text{بوسیہ مساوات (۱)}$$

$$\text{اور (۲) کی تین حاصل ہوگا } \text{لا} = \frac{\text{ط}^2}{\text{د}} \text{ اور } \text{د} = \frac{\text{ط}^2}{\text{لا}} \text{ جبکہ لکھیں گے}$$

$$\text{ہم ان تینوں لا اور د کو مساوات (۳) میں تو حاصل ہوگا یہ}$$

$$\text{ط}^2 = \frac{\text{ط}^2 \text{ د}^2}{\text{لا}} + \frac{\text{ص}^2 \text{ د}^2}{\text{لا}} = \text{ط}^2 \text{ یا } \text{ط}^2 - \text{ص}^2 = \text{لا}^2 = \text{ط}^2 \text{ ص}^2 \text{ اور یہ مساوات}$$

اوس بعید البیضوی کی ہر حکما مرکز نقطہ ص اور محور کلان ۲ ط ہی طریقہ دور

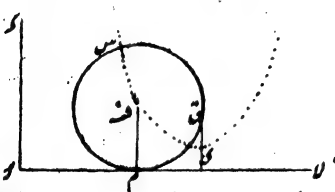
کرنی متعادیر لا اور د جو کہ یہاں استعمال میں لایا گیا بہت فائدہ مند معلوم ہوتا ہے

اور بیان اسکا تفصیل ہو سکتا ہے ظاہر ہے کہ اس صورت میں پہلی مساوات

ا کی اور ا کی اور بعد اوسکی فرض کیا کہ قیمت لا اور د کے دونوں مساواتوں

میں ایک ہی ہو تو اب ظاہر ہے کہ یہ تینوں لا اور د دونوں مساواتوں میں سوای نقطہ

تقاطع کی مساوی ایک دوسری کہ نہیں ہو سکتی ہیں اور یہ ممکن نہ لآ اور ک
تعبیر کریں گے خطوط ص م اور م ن کو اور دور کر کے متساوی لآ اور ک معلوم
ہو تا ہی کہ لآ اور ک ہمیشہ اوٹار نقطہ تقاطع خطوط ق و اور ق و کی ہو سکتی اور
مساوت اخیر جو کہ موافق اس فرض کے حاصل ہوگی وہ لوکس نقطہ تقاطع کی
(۳۰۴) دریافت کرد لوکس تمام اون دایروں کے مرکز نکاح جو کہ مس کرتی ہیں خط
ک ل اسی اور گزرتی ہیں نقطہ مس فرد ض ق (ط اور ص) میں سہی فرض کرد کہ



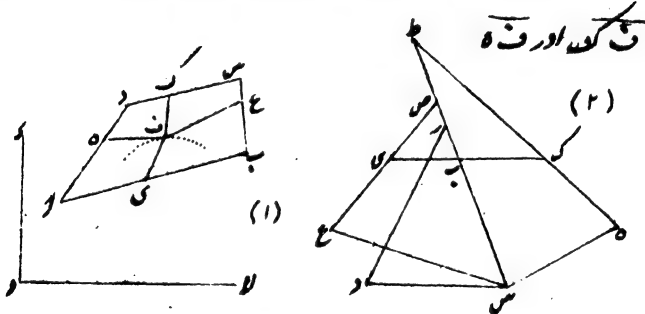
م م م ایک اون دایروں میں
سہی ہر جگہ محو متقاطع علی التوام
لآ اور ک و مین اور لآ اور ک

اوٹار مرکز ق کے مین اور لآ اور ک اوٹار ایک ایسی نقطہ کی مین جو کہ محیطہ
بر واقع ہی اور اب مساوت دایرہ س ق م کی یہ ہوگی (۱+۲) + (۳-۴) =
= ق (۶۵) لیکن جبکہ یہ دایرہ نقطہ ق مین سہی گزریگا تو صورت مساوت
گزشتہ کی یہ ہو جاوے گی (ص-۱) + (ط-۲) = ق (۳) اور چونکہ خط لآ
ماس دایرہ کا ہی سپوٹ ہے ق = ۱ = (ص-۱) + (ط-۲) = ۲ = ۱
یا لآ-۲ ط-۲ ص-۲ ص+۲ ط+۲ ص=۰ ظاہری کہ یہ مساوت قریب الصو
کی ہے موافق (۱۷) کی اور ظاہری کہ صورت مساوت گزشتہ کی یہ ہو سکتی ہے
(ط-۲) = ۲ ص (۱-۲) اب اگر بدلیں ہم نقطہ شروع نقطہ کی
جس کے لآ اور ط اور مین تو ہمیں حاصل ہو گا یہ لآ = ۲ ص و نو

۱۔ اب معلوم ہوا کہ اگر اس کی نقطہ شروع خط منحنی مطلوب کا ہی اور یہ نقطہ مرکز
 ہے چھوٹی دایرہ کا ہی اب اگر دایرہ بجا کی گزرنی کی نقطہ مفروض میں سے
 مس کری ایک دایرہ مفروض کو تو اس صورت میں ہی لو کہ نقطہ کا قریب
 البیضوی ہو گا۔

(۳۰۳) فرض کرو کہ آ ب اور ب س اور س د اور د ر شکل (۱) میں

ایسی خطوط ہیں جنکا مقام معلوم ہی دریافت کرو کہ لو کہ نقطہ کا اس طرح ہے کہ اگر
 کیسے جاوین خطوط کی اور ف سی اور ف ک اور ف ہ بناتی ہوئی زاویہ مفروضہ
 خطوط آ ب اور ب س اور س د اور د ر سی توسط ف کی اور ف سی = سطح



فرض کرو کہ وہ نقطہ شروع محور دن متقاطع علی القواہم ولا اور د کا ہی اور
 لا اور د آ و آ ر ف کے ہیں اور فرض کرو کہ ق م اور ق ن اور ق ج اور ق ح
 کو سینکڑہ اون زاویوں کے ہیں جو کہ ف کی اور ف سی وغیرہ بناتی ہیں خطوط
 آ ب اور ب س وغیرہ سی۔ اور چونکہ آ و آ ر خط آ ب کی یہی
 د = سطح لا + مس تو ف سی = $\frac{د - ط - ن}{ط + ۱}$ مس اور

سادات خط ب س کیہ ہو = ط لا + ص توفع = $\sqrt{\frac{s - \text{ط} - \text{لا} - \text{ص}}{2b+1}}$

اور ... دس ... ک = ط لا + ص توفک = $\sqrt{\frac{s - \text{ط} - \text{لا} - \text{ص}}{2b+1}}$

اور ... اد ... ک = ط لا + ص توفہ = $\sqrt{\frac{s - \text{ط} - \text{لا} - \text{ص}}{2b+1}}$

اسیو اعلیٰ موافق دعویٰ کے $\sqrt{\frac{s - \text{ط} - \text{لا} - \text{ص}}{2b+1}} \times \sqrt{\frac{s - \text{ط} - \text{لا} - \text{ص}}{2b+1}} =$

$\sqrt{\frac{s - \text{ط} - \text{لا} - \text{ص}}{2b+1}} \times \sqrt{\frac{s - \text{ط} - \text{لا} - \text{ص}}{2b+1}}$ چونکہ یہ سادت دوم تیرہ کی

تو کو کس نقطہ کا تراش مخروطی ہوگی اور خاص صورتیں اس سادت کے مقام

خطوط مفروضہ بر سو قوف ہو گئی ہیں شکل اسی ہی عام طور سے ثابت ہو سکتی ہے

فرض کرو کہ ۳ یا ۴ یا زیادہ خطوط مفروضہ ایسی ہیں جن کا مقام معلوم

ہی اب مطلوب ہے ایک ایسا نقطہ جسے اگر کبھی چادیں خطوط بناتی ہوگی زاویہ

خطوط مفروضہ تک توسط دو خطوط ان خطوط میں سے ایک نسبت مقررہ

رکتا ہی مربع تیسے ضلع سے جبکہ خطوط مفروضہ تین ہوں یا سطح باقی دو خطوں

سے جبکہ چار خطوط مفروضہ ہوں اور اگر بائچ خطوط مفروضہ ہوں تو مجسم تین

خطوں کا نسبت معلوم کہتا ہے باقی دو خطوں کے مجسم سے مع ایک تیسری خط

مفروضہ کے یا باقی تین خطوط کی مجسم سے جبکہ خطوط مفروضہ چہ ہوں اور اگر

سات خطوط مفروضہ ہوں تو حاصل ضرب چہرہ چار خطوں کا ایک نسبت معلوم

رکتا ہی باقی تین خطوں اور ایک اور خط معلوم کی حاصل ضرب سے یا باقی چار

خطوں کے حاصل ضرب سے جبکہ آٹھ خطوط مفروضہ ہوں اور وغیرہ نسبت معلوم

۲۴۵

رہتا ہی وغیرہ سہی اس شکل کے ثابت کر سبب مہندہ سان مفروضین بہت دقیق ہو
اور باوجود سہی ملیح کی کوئی او سکون ثابت نہ کر سکا اور عیسٰی بیان کرنا ہی کہ یہ
شکل اقلیدس اور پلوٹینس سے حل ہوئی اور اس شخص نے اس شکل کو حیدر
مفروضین یا چارہون ثابت کیا اور اس صورت میں اسے اس شکل کو حل کر کے
کیا کہ لوگسٹ کا تراش محرومی اور وہ جس زیادہ خطوں کی صورت کو حل کر سکا
اور جبکہ تعداد خطوط کی سات یا آٹھ فرض کی گئی تو مفروضین اس شکل کو اس خاص
صورت میں بیان ہی کر سکی کہ کونہ وہ سوای مجسم اور کسی صورت سہی قیف نہ تھی اور
ظاہری کہ سمجھا اس شکل کا بغیر اس غائب جبر مقابلہ کے ناممکن ہے کہ کونہ حیدر
جابر خطوں کا سوای جبر مقابلہ کی میان نہیں ہو سکتا اس شکل کو دس کارٹیز صاحب
نے ثابت کیا اور اس شخص نے اس شکل کے ثابت کرنے سہی طریقہ ثابت کرنے اشکال
ہند سہی کا بوسیدہ جبر مقابلہ کے دریافت ہوا اس شکل کو دس کارٹیز صاحب نے
بطور آئندہ حل کیا فرض کر کے کہ a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور w اور x اور y اور z اور a اور b اور c اور d اور e اور f اور g اور h اور i اور j اور k اور l اور m اور n اور o اور p اور q اور r اور s اور t اور u اور v اور <

نامہ زاویہی مثلث کو ب رکے معلوم ہیں تو ب ر = ط x ا ب = ط لا

س ر = ط لا + د اور س د = ط (ط لا + د) اور چونکہ ص = ط ب ی

= ط (س + لا) س ص = د + ط (س + لا) اور س ع =

ط (د + ط (س + لا)) اور چونکہ ب ط = ط ب ک = ط (د - لا)

س ط = د + ط (د - لا) اور س ہ = ط (د + ط (د - لا))

اور چونکہ سطح س ب اور س ع = سطح س د اور س ہ تو

د + ط (س + لا) = ط (ط لا + د) + ط (د - لا) { اس

مساوت کو دس کارٹیز صاحب نے یہ تفصیل حل کر کے بیان کیا یہ مساوت

تراش مخروطی سے تعلق رکھتی ہے اس سے مثال آئندہ عدد و نمبر سے بھی کبھی

فرض کرو کہ ی ۱ = ۳ اور ا ک = ۵ اور ب = ب ر اور ب س = ۱/۲

ب س = ۱/۲ ب ی اور ک ب = ب ط اور س د = ۳/۲ س ر اور

س ع = ۲ ص س اور س ہ = ۲/۳ س ط اور ا د = ۵/۶

اور سطح س ب اور س ع = سطح س د اور س ہ کی اور موافق طریقہ

اسی صورت میں دات کی یہ معلوم کی د + لا + لا - لا - لا - لا = ۰

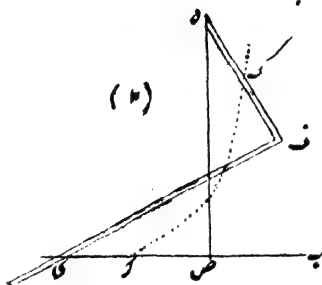
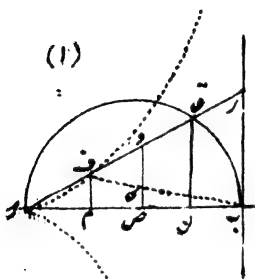
اس مساوت کو اس سے ثابت کیا کہ دائرہ سے تعلق رکھتی ہے اور موافق فقرہ

(۷۲) کے اوتار مرکز کی یہ معلوم ہو گئی ۱/۲ اور ۱/۳ اور نصف قطر =

= ۱۹/۳ مثلاً مثلاً (۳۴) فرض کرو کہ ا ق ب

ایک نصف دائرہ ہے جبکہ قطر ا ب ہے اور ب ر ایک خط غیر محدد و عمود

خط اب پری اور اق ر ایک الیہ خط مستقیم ہے جو کہ دائرہ سی نقطہ ق پر اور
 ب ر سی نقطہ آ پر ملتا ہے اور قطع کرو اف = ق ر اب دریافت کرو لو کہ
 نقطہ کا - فرض کرو کہ آ نقطہ شروع محور و تقاطع علی القوایم کا ہے
 اور اب محور لا ہے اور مان لو کہ اب = ۲ ط اور ام = لا اور م ف = س
 اور کیچو ق ن متوازی م ف کے



چونکہ اف = ق ر تو ام = بن اور ام : م ف :: بن : ق یعنی
 $لا : س :: (۲ - ط) : (۲ - ط) لا (۶۵) \therefore \frac{لا}{۲ - ط} = س$ اور
 $\frac{لا}{۲ - ط} \pm س$ جدول آئندہ سی واسطے ہر ایک خاص قیمت لا کے قیمت
 کے کی حاصل ہوگی

۶	۵	۴	۳	۲	۱	
-	$ط < ۲$	$ط$	$ط > ۲$	$ط$	۰	قیمتین لا کی
ناممکن	ناممکن	∞	ممکن	$ط$	۰	قیمتین لا کی

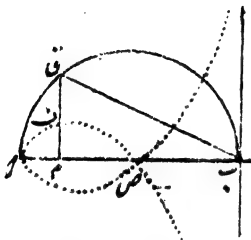
(۱) سی دریافت ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ شروع پر گزرتا ہے اور (۲) سی معلوم ہوتا ہے

کردہ تھیں نصف دائرہ AB کے برابر AC اور BC سے معلوم ہوتا ہے کہ AC BC سے
 ممکن ہوگی جبکہ قیمتیں AC کی کم BC سے فرض مجاہدین اور BC سے معلوم ہوتا ہے
 کہ نقطہ C پر ایک ایسا وتر ہے جسکا طول لامتناہی ہے یا B پر خط متفرقات خط
 کا ہی وسیلہ تمام ان قیمتوں کے ایک قوس غیر محدود حاصل ہوگی جو کہ نقطہ A سے شروع
 ہوگی ہمیشہ خط AB کی پاس آتی جاتی ہے اور BC سے دریافت ہوتا ہے کہ وسطی
 تمام ان قیمتوں کے جو کہ BC سے شروع ہوں کہ ناممکن یعنی خط منحنی AC دہنی
 طرف خط متفرقات کی واقع ہنیں ہے اس طرح AC سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی
 بائیں طرف آگے ہی واقع ہنیں ہے اور چونکہ وسطی ہر ایک قیمت AC کی دو قیمتیں
 کی نکلتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی تو اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی
 کی طرف آگے ہی واقع ہے۔ واضح ہو کہ اس خط منحنی کو ڈائی اوکلیس صاحب نے
 ایجاد کیا ہے اور یہ اور نام اسکا اسنے بسا اڈر کہا اسنے اس شکل کی دیکھتے
 دو وسطی نسبت در میان دو طرفوں کی معلوم کئی بیشتر اس ریاضی دان کے
 پیشتر صاحب نے اس شکل کی ایک خاص صورت نکالی تھی فرض کرو کہ B ص اور
 ص AC دو اطراف ہیں اور AB ایک ایسا دائرہ ہے جسکا مرکز C اور نصف قطر
 BC ہے اور کیچو ایک خط مستقیم غیر محدود BC کے گزرتا ہوا نقطہ C میں سے ہو
 اب کیچو خط AC و BC کا ملتا ہوا بی AC سے BC سے نقاط C اور D میں اور
 دائرہ BC سے نقطہ E میں اس طرح سے کہ $BC = CD$ تو اب طائر کی کہ BC سے
 دو وسطی نسبت میں ہوگا لیکن مقام نقطہ C کا دریافت ہنیں ہو سکتا ہے

اسبوط ڈاٹھی اوکھس نے اس خط منحنی کو واسطی دریافت کر لی ایک سلسلہ نقطہ
 کی ایجاد کیا جسکی سیدھی اوسے واسطی ہر ایک طول میں سی کے اس شکل کو ثابت
 یعنی کجیہ سی مقدار صی کی فرض کرو کہ یہ شکل تمام صورتوں میں ثابت ہوگی
 مثلاً فرض کرو کہ بعض اور صی اور سبسا اڈ کیجا ہوا سی اور کچھ خط پٹی خط
 منحنی سے نقطہ پڑتا ہی اور چونکہ $د = ۱$ اور $ن = ۱$ تو
 $دق = ۱$ ہو سیکہ حدود اس خط منحنی کے بہت سی نقطے اس خط منحنی کے حاصل
 ہو سکتی ہیں جسکے ملانی سے یہ خط منحنی بنی گا اور چونکہ اسطوری بنانا اس خط منحنی
 کی حرکت پر موقوف ہی تو ہر سی کہ بنانا اسکا موافق دلیل ہندی سی کے صحیح نہیں ہے
 اسبوطی نیوٹن صاحب نے ایک آسان آلہ واسطی اس خط منحنی کے بوسیہ
 حرکت متواتر کے ایجاد کیا۔ فرض کرو کہ صہ شکل (۲) میں ایک خط
 مستقیم متوازی خط بے کی ہر قطع کرو $۱ = ی = ۱$ ص اور فرض کرو کہ
 $ی = ۱$ ایک بڑی کا آلہ سی جسکی طرف $ن$ غیر متحدہ اور $د = ۱$ ہو
 اس آلہ کو اسطرح سے حرکت دو کہ بڑی طرف $ی$ کی ہمیشہ نقطہ $ی$ میں گزری
 ہوگی یہی اور انجام د دوسری طرف $د$ کی خط صہ پر سر کی تو اب لو کہ
 نقطہ ک کا جو کہ $ی$ میں خط $د$ کے واقع ہوتا ہوگا۔
 دریافت کرو مساوت قطعی اس خط منحنی کی فرض کرو کہ $د = ۱$ نہ جس ر اور
 $لا = ۱$ نہ خیر جبکہ بکین ہم ان قیمتوں لا اور د کو اس مساوت میں

$$\frac{لا}{د} = \frac{۲}{۱} = ۲$$
 تو حاصل ہوگا $ی = ۲$ (ص ۲) = $\frac{۲}{۱}$ (ص ۲) = ۲

نق = ۲ ط جب ر = مسر (مسأل) اگر ایک عمود اس طریقیہ
 البیضوی سے ایک مماس پر کھینچا جاوے تو لو کس لہ کنی تقاطع کا سناؤ ہوگا
 (۳۰۵) اگر او ب ایک دایرہ اور ص ایک نقطہ قطر اب پر ہو اور م ق
 ایک وتر ملاوے گا اور کچھ ص ق موازی ب ق کے ہو کہ ط ق ہی منظم م ق کی
 نقطہ ق پر آب دریافت کرد لو کس نقطہ ق کا



فرض کرو ۱ = لا اور م ن = ۵

اور ۱ ب = ط ۱ ص = ص نو اب

خط برہی ب م : م ق :: ص م : م ن

یا (ط - لا) : (ط - لا - لا) :: (ص - لا) : ۵

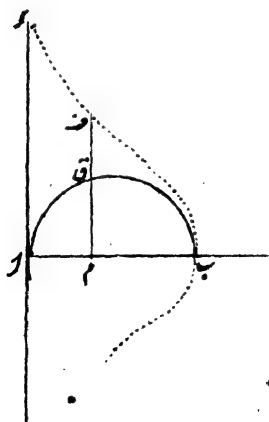
۵ :: (ص - لا) : (ط - لا - لا) جبکہ لکھیں گے ہم اس مساوت میں وہ قیمتیں جو کہ
 جدول لنیدہ میں لکھی گئی ہیں تو نتائج مرقومہ ذیل اس مساوت سے حاصل ہو گئی

۶	۵	۴	۳	۲	۱	
-	ط	ط	ط	ص	۰	قیمتیں نام کی
نام ممکن	نام ممکن	ممکن	± ∞	۰	۰	قیمتیں نام کی

(۱) اور (۲) سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی ۱ اور ص میں می گذر تا ہے اور (۳)

سی خطا ہو تا ہے کہ وتر نقطہ ب پر خط متفرع الملاقات خط منحنی کا ہے (۴) سے
 معلوم ہوتا ہے کہ دو قوسیں خط منحنی کی درمیان ۱ اور ص کے واقع ہیں اس لیے کہ

دو توبین در میان حصہ اور پ کے اور (۵) اور (۶) سہی معلوم ہوتا ہے کہ
خط منحنی دایہنی طرف پ کے اور بائیں طرف آ کے واقع نہیں ہے۔
اگر حصہ = ۰ تو بیضی شکل جو کہ در میان آ اور حصہ کے واقع ہی جاتی رہیگی
تو اب ظاہر ہے کہ یہ خط منحنی سداً ڈائی اوکلس کا ہو جاوے گا۔ اگر حصہ منفی
ہو یا نقطہ ص بائیں طرف آ کے ہو تو خط منحنی کی دوشاخیں ہو گئی اور یہ نقطہ
آ سے شروع ہو کر بائیں خط مستقیم الملاقات کی آتا جاوے گا جو نقطہ پ سے کھینچا
ہی اگرچہ یہ نقطہ حصہ کا خط منحنی پر نہیں ہے لیکن تاہم اس سے تعلق رکھتا ہے اس
نقطہ کو نقطہ سی کہتے ہیں ذکر اس نقطہ کا بجزنی حساب جزئیات میں ہوتا ہے
جس کا معلوم کر دیکھنا منظور ہے وہ حساب جزئیات کے کتابوں میں دیکھی مثال
دریافت کرو کہ لو کہ نقطہ ق کا جبکہ نقاط آ اور ق وتر م ق قریب البضوی سے
اس طرح قطع کئی جاوے کہ وہ ہمیشہ مساوی فاصلہ پر نقطہ ق اور اس قریب البضوی
سے واقع ہوں۔ غ



(۳۰۶) دریافت کرو کہ لو کہ

نقطہ ق کا جبکہ خط م ق ایک

وتر نصف دایرہ کو ق سے

ہو اور م ق نقطہ ق کہ

اس طرح سہی کھینچا جاوے کہ

م ق : م ق :: ۱ : ۱

ایک ایسی مجسم کی ہو کہ قاعدہ اس کا مربع ایک مگر قطر کا ہو اور لمبائی اس کی
 دوسرا انکڑا یا $z = \sqrt{a^2 - b^2}$ فرض کر دو کہ تو نقطہ شروع ہوگا
 متقاطع علی القوائم کو اور لا کا ہی اور $b = 2$ فرض کر دو کہ $a = 0$
 $b = 2$ یا $z = 0$ یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی مطلوب نقاط a اور b
 میں سے گزرتا ہے اور جبکہ $a > 2$ تو z مثبت ہوگا اور جبکہ $a < 2$ تو
 قیمت z کی منفی ہوگی اور مقدار اس کی لا نہایت ہو سکتی ہے کیونکہ کعب ایک متغیر
 منفی کا منفی اور ممکن ہوتا ہے اور جبکہ a منفی فرض کیا جاوے تو z مثبت ہوگا
 اور یہ لا نہایت زیادہ ہوتا جاوے گا اور وہ طے ہر ایک قیمت a کے ایک صحیح
 z کی حاصل ہو سکتی ہے اور باقی دو قیمتیں اس مساوت کی $z = \pm 1$ ہوں
 ہوگی۔ بوسیدہ پہلانی یعنی کعب لینی مساوت گذشتہ کی بہین حاصل ہوگا

$$z = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$$

$$z = \left\{ a - \frac{1}{4} \left(\frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a^2} + \text{و غیرہ} \right) \right\}$$

اسی واسطے مساوت خط متغیر المقات

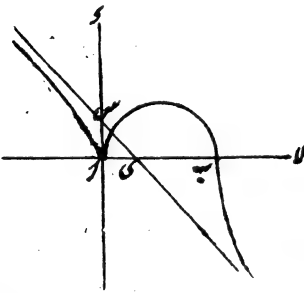
$$z = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \quad (195)$$

قطع کر دو کہ میں سے اس $\frac{b^2}{4}$

اور a میں سے $z = \frac{b^2}{4}$ اور ملاؤ اس کی کو تو جبکہ خط z کے کعبی جاوے

دونوں اور z کی تو وہ خط متغیر المقات خط منحنی کا ہوگا۔

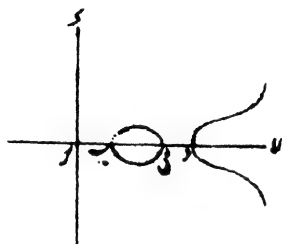
مثال دریافت کر دو کہ اس مساوت کا $z = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$ اور اس مساوت کا



۳ = ط - لا - لا - ۳ (۳۰۸) دریافت کرد لوگس اس مساوت کا

ط ۲ = لا ۳ + م لا ۲ + ن لا + ف صورت (۱) فرض کرو کہ قسمین اس مساوت
کی صحیح اور نامساوی ہیں اور تعبیر کرو ان کو ط اور ص اور س سے اس طرح کہ
ط بڑا ہو ص سے اور ص بڑا ہو س سے تو اب ظاہری کہ صورت مساوت
کی یہ ہوگی $\pm = \sqrt{\frac{\text{لا} - \text{ط}}{\text{ط} - \text{لا}}}$ (لا - ص) (ص - لا)

۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
-	∞	س	ص	ط	لا	لا	ص	ط	۰	قسمین لاگی
ناممکن	∞	ممکن	۰	ناممکن	۰	ممکن	ممکن	۰	ناممکن	قسمین لاگی



فرض کرو کہ آ نقطہ شروع

محور متنوع اعلا القام

ولا اور لا کا ہی اور

فرض کرو کہ ب = ط

اور س = ص اور

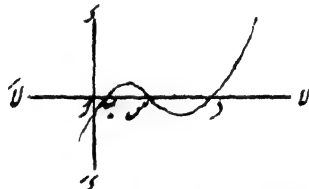
۱ = س (۲) اور (۵) اور (۷) سہ معلوم ہوتا ہے خط منحنی نقاط
اور س اور د میں سہ گزرتا ہے اور (۳) اور (۶) سہ ظاہر ہوتا ہے کہ خط
منحنی در میان نقاط اور ب اور د کے واقع ہنیں اور (۴) سہ
دریخت ہوتا ہے کہ در میان ب اور س کے دو شاخیں خط منحنی کے واقع ہیں اور

(۸) اور (۹) سی معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ α سی لائنایت پہلیتا ہے
 اور (۱۰) سی دریافت ہوتا ہے کہ بائیں طرف α کی خط منحنی واقع نہیں ہے۔
 اگر قیمتیں مساوت کی منفی فرض کیجاوین تو اس صورتیں ہی خط منحنی کی یہی صورت
 ہوگی لیکن مقام اسکا نسبت نقطہ شروع کی مختلف صورت گذشتہ سی ہوگا
 صورت (۲) اگر دو قیمتیں مساوت کی مساوی ہوں تو صورت مساوت کی یہی ہوگی

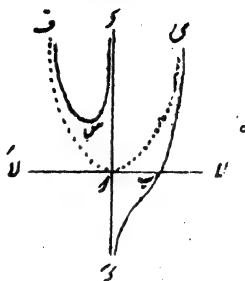
$$s = (a - s) \sqrt{a - \frac{a^2}{s^2}} \quad \text{یا} \quad s = \pm (a - \frac{a^2}{s^2}) \sqrt{a - \frac{a^2}{s^2}} \quad \text{صورت اول}$$
 میں شکل خط منحنی کی تقریباً مثل شکل گذشتہ کی ہوگی لیکن نقاط s اور α ۔
 منطبق ایک دوسرے پر ہوگی اور صورت دوم میں نقاط β اور s ایک دوسرے
 پر منطبق ہیں یا شکل بیضوی β s نقطہ متجانس ہو جاوے گا۔
 صورت (۳) اگر دو قیمتیں مساوت کی ناممکن ہوں تو وہ حصہ خط منحنی کا جو کہ
 مثل صورت گذشتہ کی s اور جو نقطہ α سی شروع ہونے والی حاصل ہوگا
 صورت (۴) اگر قیمتوں قیمتیں مساوت کی مساوی ہوں تو صورت مساوت کی
 یہی ہو جاوے گی $\frac{a}{s} = (a - \frac{a^2}{s^2})$ اس خط منحنی دو سابقین میں اور یہ دونوں
 نقطہ β s شروع ہوتی ہیں اور محبہ β طرف میں انکی طرف محور α کی پیری ہو
 ہیں اس خط منحنی کو نصف ملبعی قریب البیضوی کہتی ہیں مساوت اسکی بہت
 آسان ہوگی جبکہ s β نقطہ شروع خط منحنی پر فرض کیا جاوے یعنی جبکہ α
 بجای (۵) $\frac{a}{s} = (a - \frac{a^2}{s^2})$ لکھا جاوے تو اس صورت میں $\frac{a}{s} = \frac{a^2}{s^2}$ اور یہ خط منحنی بہت
 مشہور ہے کیونکہ اول طول اس خط منحنی کے ایک حصہ کا مساوی ایک خط مستقیم کا

ثابت ہوا تھا۔ ش ش ش ش ش

(۳۰۹) دریافت کرو کہ کس اس مساوت کا $\tau = \alpha + m\lambda + n\lambda + f$ واضح ہو کہ کس اس کا مثل مساوت گذشتہ کی دریافت ہو سکتا ہے شکل آئندہ کس اس مساوت کا ہو گا جبکہ تین قیمتیں اس مساوت کی مثبت اور صحیح اور مساوی ایک دوسرے ہوں اگر دو قیمتیں مساوی ہوں تو ایک نصف بیضوی کی صورت کی شکل پیدا نہیں ہوگی اگر تین قیمتیں مساوی ہوں تو دو دو حاصل نہیں ہوگی اس صورت میں مساوت کی یہ ہر جا دیگی $\tau = (\lambda - \mu)$ یا اگر نقطہ شروع نقطہ پربہ لاجہ $\tau = \lambda$ اور اس صورت میں خط منحنی کو قریب بیضوی کہتے ہیں۔



(۳۱۰) اگر مساوت یہ ہو $\tau = \alpha + m\lambda + n\lambda + f$ تو اس صورت میں محور کا خط متغیر المقات خط منحنی کا ہی اور ایک شاخ خط منحنی کی زاویہ کو کماتے ہیں ہوگی اور باقی صورت خط منحنی کی مثل شکل گذشتہ کی ہوگی اگر فرض کریں ہم منحنی کی شاخ نقطہ پربہ طرف او کی پہلی بطور خط متغیر المقات کی یعنی ہمیشہ خط او کی نزدیک آتے ہیں اور ظاہری کہ اس صورت میں شکل خط منحنی کی مختلف ہوگی موافق ہوں مساوت کی یعنی جبکہ قیمتیں مساوت کی گہرائی اور بڑھیں گی تو شکل خط منحنی کی بھی بدلتی جاوے گی اب ہم فرض کرتے ہیں وہ صورت جبکہ $\tau = (\lambda - \mu)$



۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
$\infty -$	$-$	∞	\leq	\geq	\leq	\geq	قیمتین لا کی
$\infty +$	$+$	∞	$+$	$-$	0	∞	قیمتین کی

(۱) سی دریافت ہوتا ہے کہ آدھ خط متفرق الملاقات خط منحنی کا ہے اور (۲) سی ظاہر ہوتا ہے کہ خط منحنی تقاطع کرتا ہے محور کو نقطہ b میں جہاں کہ $(b = ط)$ اور (۳ اور ۴ اور ۵) سی معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ a سے b تک پہنچے محور سے پہلے ہی اور نقطہ b سے اوپر کے طرف لا کی لا نہایت پہلے ہی اور (۴) اور (۵) سی شلخ f سے x کی حاصل ہوگی۔ اس خط منحنی کو موافق اسکی صورت کی خط منحنی سے برگر یا ترسول کہتی ہیں جو سید اس خط منحنی کے فرق درمیان شلخ قریب البیضوی اور شلخ بعید البیضوی ایک خط منحنی کے دریافت ہو سکتا ہے۔ واضح ہو کہ شکل گذشتہ میں b اور a دو شاخیں بعید البیضوی کی ہیں کیونکہ خط مستقیم ax ان کا خط متفرق الملاقات ہے لیکن b ہی اور a سے قریب البیضوی کی ہیں کیونکہ ان کا خط متفرق الملاقات خط منحنی f ہی ہے جو کہ

خط مستقر الملاقات قریب البیضوی کا ہو اگر تاہم اور مساوت اور خط منحنی
کی جو کہ نقاط سی بنا ہو اسی یہ ہو $r = \frac{1}{p} (144)$ مثال درپیش کرد
کوکل اس مساوت کا $لا - لا - لا - لا = 0$ اگر مساوت یہ ہو

$لا + ط + لا = لا + لا + لا + لا$ صورت اس مساوت کی خط منحنی کی مساوت
آئندہ کی فیتوں پر موقوف ہو $لا + م + لا + ن + لا + ط = 0$ واضح ہو کہ اس
مساوت کی خاص صورتوں میں کسی طرح کا اشکال واقع نہیں ہوگا اور مساوت
عام خطوط مستقر الملاقات کی یہ ہوگی $r = \pm (لا + \frac{1}{p})$ اور محور خط مستقر

الملاقات ہوگا - $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p}$ $\frac{1}{p}$
(۳۱۱) اگر اجزای لا اور م لا مساوت میں نہوں تو اس صورت میں صورت

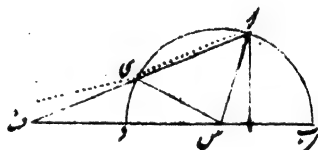
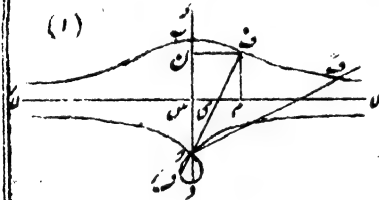
مساوت گذشتہ کی یہ ہو جاوے گی $لا + ط + لا = ن + لا + ف$
 $r = \pm \sqrt{\frac{ط + م + ف + ن + لا}{لا}}$ اگر مخرج اس صورت کا ایک مقدار

مقررہ ہوتا تو یہ مساوت بیضوی یا بعید البیضوی یا قریب البیضوی سی تعلق کرتی
جبکہ ن مثبت یا منفی یا صفر ہوتا تو اب ظاہر ہو کہ اگر بجای ایسی ایک مقدار مقررہ
کی مقدار غیر منقطع لا لکھی جاوے تو یہ ترشش محذور علی بعید البیضوی بن جاوے گی جبکہ
لا نہایت سماقین طرف آئی کہ ہمیں کی جبکہ محور خط مستقر الملاقات ہوگا اور اسی مساوت
کی خط منحنی کی دو شکلیں ہو سکتی ہیں موافق فیتوں ف کے ثبوت اشکال ایک خاص
کتاب بیرون صاحب کی میں ہے -

فقہہ گذشتہ سی معلوم ہوتا ہے کہ خطوط منحنی تیسرے مرتبہ کے لا نہایت شافین

پانچم
رکتی بین اور یہ حقیقت میں صحیح کیونکہ ہر ایک مساوت طاقت درجہ سی کم سی کم
ایک صحیح قیمت حاصل ہوگی پس اس صورت میں ہر ایک صحیح قیمت کی موافق ایک
خاص صحیح قیمت لاکے حاصل ہوگی۔

(۳۱۲) دریافت کرو مساوت کن کو اذ کی جسکو نکونڈیز صاحب فی ایما دیہ
فرض کرو کہ لالا شکل (۱) میں ایک خط غیر محدود ہو اور آ ایک نقطہ مفروض ہو
کیچو اس نقطہ سے عمود کو س ب خط لالا پر اور کیچو اور بہت سے خطوط کو ی ق
اور وی وغیرہ اور قطع کرو ی ق کو ہمیشہ مساوی سے ب کے تو لو کس نقطہ
ق کا کن کو اذ ہوگا۔ اگر ہی و چین سے قطع کریں ی ق = ی و تو لو کس
ق چھوٹا کن کو اذ ہوگا ورنہ کن کو اذ سی ایک خط سختی پیدا ہوگا یعنی مساوت دونوں
کی ایک ہی ہوگی۔



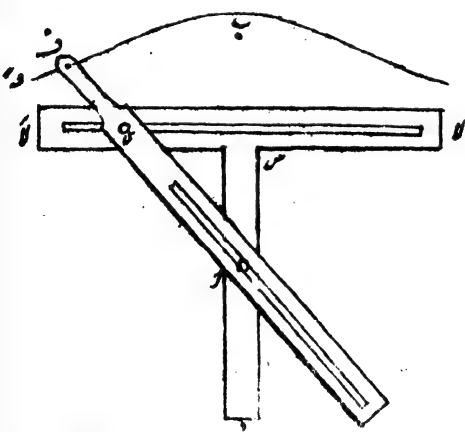
فرض کرو کو س = ط اور س ب = ص اور س م = لا اور م ق = و
تو اب ظاہر ہے کہ ی ق : م ق :: و ق : ا ن یا ص : و :: لا : (ط + و) : ۲
:: لا : (ط + و) : ۲ = ص : (ط + و) : ۲ :: لا : (ص - و) : ۲ = (ط + و) : ۲
:: لا = $\pm \frac{ط + و}{ص - و}$ اس مساوت کی تین صورتیں ہو سکتی ہیں
ص کے ط یا = ط یا > ط صورت (۱) ص < ط

۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
ص - ط	ص - ط	ص - ط	ص - ط	ص - ط	ص - ط	ص - ط	ص - ط	قیمتیں لاکھ کی
مکمل	مکمل	۰	۰	مکمل	مکمل	۰	۰	قیمتیں لاکھ کی

(۱) سی دریافت ہوتا ہے کہ لاکھ خط متفرق الملاقات خط منحنی کا ہے اور (۲) سی معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ ب میں سے گزرتا ہے اور (۳) اور (۴) سی معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ ب میں سے شروع ہو کر اسی طرف خط متفرق الملاقات کی واقع ہو اور نقطہ ب کی اوپر لکھتے ہیں جاتا ہے اور اس کی وسیلہ سے شاخ ب سے واقع حاصل ہوگی اور (۵) اور (۶) سی معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی نقاط آ اور د میں سے گزرتا ہے اگر س د = ص اور (۷) سی ظاہر ہوتا ہے کہ شاخ آ و لاکھ خط منحنی طرف خط متفرق الملاقات کی پہلی سی اور (۸) سی ظاہر ہوتا ہے کہ خط منحنی درمیان نقاط آ اور د کے واقع ہو اور بوسیلہ دو قیمتوں لاکھ کے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی س لاکھ کی طرف ہی پہلی سی ہے۔ صورت (۲) ص = ط جدول گذشتہ میں لکھو ص = ط اور در کرد (۸) کو تو اب صورت خط منحنی کی مثل مرقومہ گذشتہ کے ہوگی مگر صورت مدور آ و د مدور ہو جاوے گی اور یہ لعیب منحنی ہوئے نقاط آ اور د کے واقع ہوگا۔ صورت (۳) ص > ط جدول گذشتہ میں لکھو ص بجائے ط کے (۷) میں - اگر دے - ص تو لاکھ نامکمل ہوگا (۸) میں موافق اس فرض کے اوپر کے انداز خط منحنی میں کسی نثرے کا فرق نہیں

نہیں آویگا لیکن نقطہ ۳ درمیان ۴ اور ۵ کے واقع ہوگا اور (۸) سی ظاہری ہوگا
 کہ کوئی حصہ خط منحنی کا درمیان ۴ اور ۵ کے واقع نہیں ہے اور (۵) سی معلوم ہوتا
 کہ نقطہ ۴ خط منحنی پر نہیں ہے لیکن خط منحنی سے تعلق رکھتا ہے اور اس نقطہ کو نقطہ
 متجانس کہتے ہیں اور ظاہری ہے کہ اس صورت میں ملی کا خط منحنی مشابہ اور برکی خط
 منحنی کے ہے بوسیدہ بنائی کن گواڈ کے تصور خاصیت خط متفرع الملاقات کا بنو
 آتا ہے کیونکہ خط ی ف ہمیشہ مساوی س ب کے ہونے چاہیے اور ظاہری ہے کہ موافق
 اس شرط کی خط منحنی ہمیشہ نزدیک خط س لاکے آتا ہے (جب کہ نقطہ ۴ پر) اگرچہ
 خط منحنی خط س لا پر منطبق نہیں ہوگا لیکن پرہی زیادہ نزدیک اور کسی آویگا
 بہ نسبت کسی ایک خاص مقدار کے - یہ خط منحنی کو میہ یز صاحب بنی ایجا دکیا
 واضح ہو کہ یہ مہندس باشندہ یونان کا تھا اور ۲۰۰ برس پیشتر حضرت عیسیٰ
 کی موجود تھا اوسنی اسکی بوسیدہ سی طریقہ تقصیف کعب اور تثلیث زاویہ کا دریافت کیا
 واسطی ثبوت دوسری دعویٰ یعنی واسطی تثلیث زاویہ کی بوسیدہ اس خط منحنی کے
 فرض کر دے شکل (۲) میں زاویہ ب س ل کی تثلیث کیا جاتی ہیں کیسے خط ی ف
 ملتا ہو اور یہ سی نقطہ ی پر اور قطر سی نقطہ ۴ بر اسطرح ملی کہ خط ی ف مساوی
 نصف قطر س ل کے ہو تو اب ظاہری ہے کہ قوس دی ایک تہائی لب کی ہوگی -
 اب ظاہری ہے کہ بوسیدہ خط مستقیم اور دائرہ کی لای ف اسطرح پر نہیں کیج سکتا
 کہ ی ف = قوس (یہ بوسیدہ حرکت کی ہو سکتا ہے ایسے ہی یہ موافق
 ہندسہ کی صحیح نہیں ہے) اور چونکہ ایک مدت دراز سی ہندسان متقدمین کو

سوائی رول اور پرکار کے کوئی اور آلہ معلوم نہ تھا اسبواسطی وہ اس شکل کو
 ثابت نہ کر سکی اور جب اونکو یہ دریافت ہوا کہ تثلیث زاویہ کی بوسیلہ خطوط
 منحنی کی ہوسکتی ہر اسبواسطی اونہون کے ذہنی ثبوت اس شکل کے مختلف خط
 منحنی ایجاد کئے اور میں سے بہت مشہور خط منحنی نکو میدیز کا تھا بوسیلہ اس خط
 منحنی کے یہ شکل بطور آئینہ کے ثابت ہوسکتی ہے۔ فرض کرو کہ آقطب کن
 کو اوڈ خورد کا ہے اور ب ق خط مستقیم الملاقات اور اس خط مستقیم کو اب طاہر
 کہ نقطہ تقاطع ہی خط منحنی اور دائرہ کا نقطہ مطلوب ہوگا۔ واضح ہو کہ کن کو اوڈ
 کھان سی ہی یہ شکل ثابت ہوسکتی ہے۔ چونکہ سوائی حرکت متواتر کے یہ خط
 منحنی نہیں بن سکتا ہے اسبواسطی نکو میدیز نے ایک آسان آلہ ذہنی کیجی اس خط منحنی
 کی ایجاد کیا فرض کرو کہ لالا ایک سید ہی لکڑی ہے اور اس میں ایک سوراخ ہے اور
 فرض کرو کہ اس دوسری لکڑی لالا پر سطح پر جڑی ہوئی ہے کہ یہ لکڑی



عمود ہی اور نقطہ
 و براہیک کیل
 نمبر لکڑی
 و ہون کے سوراخ
 میں رکھی ہوئی ہے
 اور آق میں ایک
 سید نقطہ ی پر ہے

اور یہ میل سورانہ لالا میں جڑی ہوئی یعنی لکڑی کا بوسیلہ دو کیلون اور
 اور ہی لکڑی سے اور لالا سسی اس طرح ملی ہوئی ہے کہ وہ بخوبی حرکت کر سکتی ہے
 اور طول خط فی کا معلوم ہے تو اب ظاہر ہے کہ بوسیلہ حرکت لکڑی فی کا
 ایک سرہ کا قلم نقطہ پر کن کوڑا بنا دیگا اور اگر دوسرا سرہ کا قلم خطی کو
 میں کسی مقام پر رکھا جاویں تو وہ کن کوڑا خورد بنا دیگا۔ اس خط منحنی کو
 پہلے معارف استعمال میں لاتی تھی کیونکہ وہ اکثر ایک خاص لکڑی ستون میں
 بنائی ہوئی جو کہ ایک حصہ کن کوڑا کا ہی استعمال میں لاتی تھی۔

مساوات قطبی کن کوڑا کی بطور آئینہ کے دریافت ہو سکتی ہے۔ فرض کرو
 کہ شکل (۱) میں قطب ہے اور $AF = \text{نق}$ اور زاویہ $F = \text{ب} = \text{ر}$
 $\therefore \text{ط} + \text{ط} = \text{نق}$ اور $\text{لا} = \text{نق}$ جس طرح کہ کہیں گے ہم ان قیمتوں کو
 مساوات کن کوڑا کے بعد تحول کے مساوات قطبی کن کوڑا کی یہ حاصل ہوگی

ی = ط + ر + ص - واضح ہو کہ مساوات قطبی اس خط منحنی کی بوسیلہ
 حدود اس خط منحنی کے باسانی دریافت ہو سکتے ہیں ظاہر ہے کہ $\text{نق} = \text{ز}$
 $\text{ری} + \text{ی} = \text{و} = \text{اس} + \text{س} + \text{وی} + \text{س} = \text{ب} = \text{ط} + \text{س} + \text{ر} + \text{ص}$

(۳۱۳) طریقہ آئینہ واسطے دریافت کرنے مساوات کن کوڑا اس صورت کی
 خطوط منحنی میں استعمال میں آسکتا ہے اور مختلف شکلوں میں مفید ہوگا۔

فرض کرو کہ بہت سی خطوط مثل وی ف کی شکل (۱) میں جو کہ کبھی ہوئی ہیں
 کاٹتی ہیں خطوں کو نقاطی وغیرہ میں ہر ایک نقطہ کی کو مرکز فرض

کر کے کچھ ایسی دائرے جنکا نصف قطر من ہو قطع کرتی ہوئی خطوط کوئی ق کے
نقاط اور ق میں تو اب ظاہر ہے کہ لو کس و سلکا کن کو اوڈ ہوگا واسطی ہون
اس مسئلہ کے فرض کرو کہ آنقط شروع محور وں متقاطع علی القوائیم کامی اور
و ب محور کا اور و لا متوازی سے لا کے اور فرض کرو کہ مساوت عام ہوتا
کی د = م لا اور اس میں م غیر منقطع ہو تو اب ظاہر ہے کہ د = ط اور لا = م
نقطہ کی مساوات میں اور مساوت اوس دائرہ کی جسکا مرکز نقطہ کی نصف
قطر سے ہی بیہ ہوگی $(د - د)^2 + (لا - لا)^2 = ص^2$ یا $(د - ط)^2 + (لا - م)^2 = ص^2$
جبکہ دور کرین گی ہم مقدار م کو بوسیلہ اس مساوت اور مساوت خط ای ق کے
تو مساوت خط منحنی کی بیہ حاصل ہوگی $(د - د)^2 + (لا - م)^2 = ص^2$ یا
 $(د - د)^2 + (لا - م)^2 = ص^2$ اگر خط سے لا ایک ایسا خط منحنی فرض کیا جاوے
کہ اوسکی مساوات عام بیہ ہو د = ج (لا) تو او آنقطہ کی بوسیلہ
دور کرنے مقادیر لا اور د کے مساوت د = م لا اور د = ج (لا) میں
حاصل ہوگی تو اب ہمیں حاصل ہوگی بیہ مساوات میں لا = ج (م) اور
د = م ج (م) اور مساوت دائرہ کی بیہ ہوگی $(د - م ج (م))^2 + (لا - م)^2 = ص^2$
یا $(د - ج (م))^2 + (لا - م)^2 = ص^2$ اور مساوت عام خط منحنی کی بیہ ہوگی
 $(د - ج (م))^2 + (لا - م)^2 = ص^2$
(۱۴) اگر ایک عمود مرکز اجنبہ البینوی سیسی اوسکی مماثل پر کھینچا جاوے
تو دریافت کرو کہ اوسکی نقطہ تقاطع کا - جو کہ مساوت ملاسن سے بیہ ہے

ط^۲ کو - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲ (۱) تو مساوات اوس محمود کی جو کہ مرکز سی
اس میں ص^۲ پر کہیچا جاوے یہ ہوگی = - ط^۲ ص^۲ لا^۲ (۲) واسطی دریافت کرنا
مساوات نقطہ تقاطع مطلوب کے مفادیر لا^۲ اور کو بوسیله مساواتوں (۱)

اور (۲) اور مساوات بعید البینوی کی در کرنا چاہی تو اب بوسیله (۱) اور

(۲) کے یہ حاصل ہوگا لا^۲ = ط^۲ ص^۲ لا^۲ اور کو = - ط^۲ ص^۲ لا^۲ جبکہ کہیں گے

ہم ان قیمتوں کو اس مساوات میں ط^۲ کو - ص^۲ لا^۲ = - ط^۲ ص^۲ تو حاصل ہوگا

یہ (لا^۲ + ص^۲) + ص^۲ لا^۲ = ۰ اور یہ مساوات چوتھی درجہ کی ہے

اب ہم صرف صورت اس مساوات کی ایک خاص صورت میں جبکہ ص = ط

یعنی جبکہ بعید البینوی مساوی القطر میں ہو دریافت کریں گی اب ظاہر ہے کہ

صورت مساوات گزشتہ کے موافق اس شرط کی یہ ہوگی (لا^۲ + ص^۲) =

ط^۲ (لا^۲ + ص^۲) : کو + (۲ لا^۲ + ط^۲) کو + لا^۲ - ط^۲ لا^۲ = ۰ اور

= ص^۲ - (لا^۲ + ط^۲) ± ط^۲ √ (۲ لا^۲ + ط^۲) ظاہر ہے کہ اگر علما

اندر کہ جذ کی منفی ہو تو قیمت کو کی ناممکن ہوگی اس واسطے ہم اس مساوات کو

اوس خاص صورت میں دریافت کریں گے جبکہ

= ص^۲ - (لا^۲ + ط^۲) ± ط^۲ √ (۲ لا^۲ + ط^۲) اس صورت میں قیمت

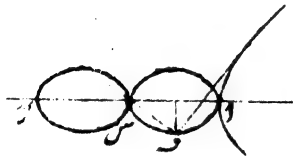
کو کی ناممکن ہوگی جبکہ لا^۲ + ط^۲ کے ط^۲ √ (۲ لا^۲ + ط^۲) یعنی اگر لا^۲ + ط^۲

+ ط^۲ کے ۲ ط^۲ لا^۲ + ط^۲ یا اگر لا^۲ کے ط^۲ لا^۲ یعنی اگر لا^۲ کے ± ط^۲

اس واسطے ہم حاصل ہوگی جدول آئندہ

۴	۳	۲	۱	
\pm	\pm	\pm	۰	قیمتیں لاکھ
ناممکن	ممکن	-	۰	قیمتیں آدھی

(۱) سی دریافت ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ میں سے گذرے گا ہی اور (۲) سی دریافت ہوتا ہے کہ نقاط آ اور آ میں سے گذرے گا ہی اور (۳) سی ظاہر ہوتا ہے کہ اس خط منحنی کی دو شاخیں ہیں



سی آ تک
اور سی آ تک

اور (۴) سی معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی پری آ اور آ کے نہیں پہنچتا سی اب ہم صورت ان بعضی شکلوں کے زیادہ تحقیق سی دریافت کر سکتے ہیں چونکہ ماس ماس بعد البصنوی برعمود محور پر ہوتا ہے تو صورت بعضی نقطہ آ پر قطع کرے گی محور کو اس طرح برکویا کہ یہ عمود محور پر سی اور نقطہ میں برزاد یہ ۵۰ کا بنا دیگی کیونکہ ماس تقریباً خط متفرع الملاقات پر منطبق ہوتا ہے تو اب عمود اس ماس برزاد یہ ۵۰ کا بنا دیگا۔ اس خط منحنی کو جسمیں برنولی صاحب نے ایجاد کیا ہے اور نام اس خط منحنی کا لیتسکیا ہے اور یہ ایک سلسلہ خطوط منحنی کا بناتا ہے موافق مختلف قیمتوں کے دریافت کر دسات قطبی لیتسکیا کی فرض کرو
 $r = \text{لی جس ر اور لا} = \text{لی جسم ر تو اب صورت اس مساوات کی}$

$$(۲۵ + ۲۷) = ۲ = ط (۲۵ - ۲۷) \text{ یہ ہو جائیگی تو } = ط ۲ \text{ جم ۲}$$

ہر ایک خط منحنی جو کہ اس شکل کا ہی منسکیا کہلاتا ہے۔

(۳۱۵) مثلاً آئندہ میں خط منحنی بوسیدہ نقاط کی باسانی کیج سکتا ہے

فرض کرو کہ ایک ایسا دایرہ لکھا ہو اسی جیسا کہ مرکز اور سن ق نصف قطر

ہی اب کیجیو وتر ق م اور ق س میں سے قطع کرو ق ن = ق م تو اب لو کہ

ن کا منسکیا ہوگا اور اگر ق م بڑی قطع کریں ہم م ر جو تیسری نسبت

میں ہو خط ق م اور س م کے یعنی ق م : س م :: س م : م ر تو کو

ر کا ایک دوسرا منسکیا ہی اور اسکی سادۂ یہ ہوگی لا۔ ط لا + ط ۲

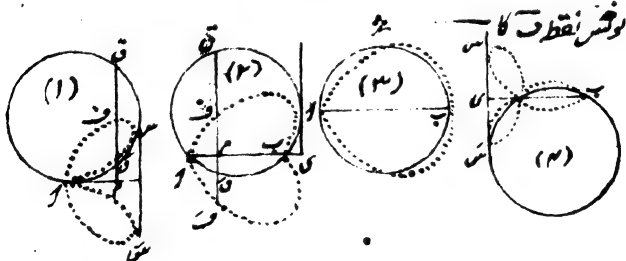
$$= . \text{ اور سادۂ آئندہ ہی } ط (۲ - ط) = (لا - ط) = (ط - لا) (ط + لا - ط)$$

سادۂ اسی خط منحنی کی ہے لیکن نقطہ شروع اسکا مختلف ہے۔ مثال

$$\text{دیانت کرو کو کہ اس سادۂ کا } ۲ = لا \frac{ط + ط لا}{ط - ط لا} \text{ نثر نثر نثر}$$

(۳۱۶) اگر آرم شکل (۱) میں ماس دایرہ آرم ق کا ہو اور ق م وتر وتر

العرض آرم کا اور م ق وسط فی النسبت آرم اور م ق کا ہو تو اب دریافت



فرض کرو م = لا اور م ق = ر اور متساوی طوع علی القوائم ق کی ہیں

اور فرض کرو کہ نصف قطر دائرہ کا = ص تو اب ظاہر ہے کہ موافق فرض کے
مربع م ف = سطح ر م اور م ق اب دریافت کرو م ق کو چونکہ مساوات
دائرہ کی قسم (۱-۲) + (۱-۲) = ۲ = ۲ یا ۲-۲ ص + ۲ = ۰
کیونکہ لا = ۰ اور ۲ = م ق = ص ∴ م ق = ص ± ماحص - لا

∴ م ف یا ۲ = ۲ ص لا ± ماحص - لا چونکہ ص - لا > ص
تو اب معلوم ہوتا ہے کہ قیمتین ۲ کی چارہین موافق ہر ایک مثبت قیمت لا حاصل
اور جبکہ لا منفی ہوگا تو ۲ کی قیمت حاصل نہیں ہوگی تو اب معلوم ہوتا ہے کہ اگر
اب = ص شکل (۱) میں فرض کیا جاوے تو خط مستقیم س ب س ب تک جو کہ
عمود خط اب پر چھ خط منحنی کی ہوگی یعنی خط منحنی اس سے بڑی نہیں پہنچے گا اور
جبکہ لا = ص تو در خط منحنی کا مساوی ماس ب س کے ہوگا و در میان
لا = ۰ اور لا = ص حاصل ہوگئی چار قیمتین ۲ کی جنکی وسیلہ دو نقدار
بیضی صورتین شکل (۱) میں حاصل ہوگئی واسطی اس بات کی کہ یہ دعوی
عموماً ثابت فرض کرو کہ خط اب کو ایک وتر دائرہ کا اشکال (۲) اور (۳)
اور (۴) میں ہے تو اب اگر ط اور ص او تار مرکز کے فرض کئے جائیں اور نقطہ
شروع تو مساوی خط منحنی کی یہ ہوگی کہ $\frac{1}{2} \sqrt{ص لا \pm ماحص + ۲ ص لا - لا}$
ظاہر ہے کہ بوسیله اس مساوات کی چار صورتیں حاصل ہو سکتی ہیں اور یہ چاروں
موقوف قیمتوں ص اور ط بڑھیں اس واسطے چار خطوط منحنی مختلف صورتوں کی
حاصل ہو گئی لیکن ان خطوط کی ایک ہی خاصیت ہوگی —

صورت (۱) جبکہ $d = 0$ تو شکل (۱) حاصل ہوگی اسکا معنی ابھی ذکر کیا ہے

صورت (۲) جبکہ اور صفت ہوں تو شکل (۲) میں $y = b + b^2 + b^3 + \dots$

صورت (۳) ص = ۰ شکل (۳)

صورت (۲) جبکہ ص منفی ہو تو شکل (۲) پیدا ہوگی مساوات انکی یہ ہوگی

$\pm = s$ - ص لا \pm لا $\sqrt{ص + 2ط لا - لا}$ خانہ پر ہی کہ اس میں وہ

سے دو قیمتیں رکھ کر حاصل ہو سکتی ہیں جبکہ تا مثبت اور ≥ 2 بی فرض کیا جا

اور جا قیمتیں پر کی حاصل ہو سکتی ہیں جبکہ یہ منفی اور $\sqrt{a^2 + b^2}$ - ط

معنی ۱۱۱ است چونکہ بدینا ایک خط منحنی کا دوسری سی آسان کرد اور اسمن

لجہ چت سان کی ہنسن و اسو اسی سکایان کرنا ضرور ہنسن و اور خوشنڈہ اک

اس شکل سے خط ط منحنی (۲) اور (۴) پیدا ہوتی ہیں یہ شکل سی سمجھ میں آئیگی

سبب سے بہتر اس کو تفصیل سے بیان کر سکی۔ شکل (۱) میں نقاط اور

رفت ہوئے عربوں کے توسط سے وسطی ایشیاء اور قسطنطنیہ اور قسطنطنیہ کے

اس نقطہ کا حوق کہہ بیٹے اور قن مرن ہو سکتا ہی اس پر

مردود یعنی صدت کنگ (۱) مرد حاصل ہوگا جو باہر طرف آکر

۱۰۰

سکتے ہیں۔ لیکن ان کا خیال ہے کہ وہ اپنے ملک کو بڑھاپے کی حالت میں دیکھ رہے ہیں۔

و اسب این موها را با دست کشی بسیار در دست و پا می کشند

یہاں جو سیدہ سلوٹھ دم اور زری تم کے مطابق بزرگ علوم و کونین ہیں۔

شکل (۳) میں کسبہ کے تقصیل کی حاجت نہیں ہے۔ شکل (۴) میں دیکھ
 نسبت فرض (۱) کے وہ بیان استعمال میں آسکتا ہے جس کا شکل (۲) میں
 ذکر ہوا ہے یعنی جو صورت خط منحنی کی کہ شکل (۲) میں ہوئی تھی وہی شکل (۴) میں
 نسبت طرف آ کی ہوگی اور چونکہ بائیں طرف ۱ کی وتر العرض اور دونوں وتر
 منحنی ہیں اسبواسطی دو وسط فی نسبت معلوم ہو سکتی ہے باچار تقطعی خط منحنی کے
 بوسیله ہر ایک وتر العرض کے حاصل ہو گئی واضح ہو کہ ایسی خطوط منحنی مختلف
 ہو سکتی ہیں اور صورت انکی موجودگی اختیار ہی اور یہ اس صورت میں بھی حاصل
 ہو سکتی ہیں جبکہ قریب البینوی یا کوئی اور خط منحنی واسطی قاعدہ کی بجائی دایرہ
 کی فرض کیا جائے مثال دریافت کرد کو کس اس سادات کا $۲ + ۳ = ۵$ ط لا ۱
 - ط لا ۳ = ۰

(۳۱۷) دریافت کرد الب ایک نقطہ ف کا کہ اگر کسبچین ہم اس نقطہ سے
 مختلف خطوط نقاط مفرغہ سے اور نہ تک تو ہمیشہ سطح سے اور ہ ق کا
 سادی ایک مقدار مفرغہ کی ہو واسطی ثبوت اس دعویٰ کے ملاؤ نقاط سے
 اورہ کو اور نصف کرہ خط سے کو نقطہ ص پر اور فرض کرد کہ ص نقطہ
 شہد مع محور و نقاط علی القوائیم کا ہی اور فرض کرد کہ $۵ = ۲ + ۳$
 اور $ص = لا$ اور $م = ف = ۴$ اور فرض کرد کہ سطح سے ف اور ہ =
 $ط ص$ اور چونکہ $ص = م = ط + لا$ اور $م = ۵ = ۲ + ۳$ تو
 $(۲ + (ط + لا)) + (۳ + (ط - لا)) = ط ص$ یعنی

اس صورت میں لنسکیا برنول صاحب پیدا ہوگا - (۳۶) فرض کرو کہ ϕ
 بڑا ہی ص سی تو اس صورت میں مساوات (۱) سی دو قیمتیں λ کی حاصل ہوگی
 اور (۲) سی ایک نامکن قیمت کی تو اب یہاں سی معلوم ہوتا ہی صورت خط منحنی کی
 موافق اس شرط کی مثل دو شکل بیضی پر ہوگی جو کہ گردہ اور سی کے
 کچی ہو ہی ہیں جبکہ ص کم ہوتا ہی تو یہ دو صورتیں گنا شروع کرتی ہیں
 یہاں تک جبکہ ص = ۰ تو اس صورت میں نقاط سی اور ہ کو کس ہو گا
 یہ خطوط منحنی بیضی کی سی صاحب کی کہلاتی ہیں اس مشہور ہیٹ دان نے رتہ
 ایک ستدہ کا مثل بیرونی خط منحنی شکل گذشتہ کے خیال کیا تھا -
 اس مساوات سی $(\lambda^2 + \lambda^2) = \text{ص} + \lambda^2$ ہو کہ (۱۲۳) دریافت کی
 گئی ہو حاصل ہوگی ایک شکل مثل صورت (۱) کے λ^2 λ^2 λ^2
 (۳۱۸) واضح ہو کہ بت سی ایسی صورتیں ہیں جن میں تیسری مقدار غیر منقطع
 کی داخل کرنے سی ایک طرح کی آسانی اور فائدہ ہوتا ہی مثلاً اگر ص ورت یہ ہو
 $\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 = ۰$ تو ظاہر ہی کہ داخلی دریافت کرنے قیمت λ^2
 اور λ^2 کی یہ مساوات موافق چوتھی یا تیسری درجہ کی مساوات کی حل ہو سکتی ہو
 مگر چونکہ تیسری یا چوتھی درجہ کی مساوات کا حل کرنا مشکل ہی ہو سکتا ہی فرض
 کرو کہ $\lambda = ۰$ $\therefore \lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 - \text{ص} = ۰$ یا $\lambda^2 + \lambda^2 + ۲ = ۰$
 $\therefore \lambda^2 = ۰$ $\therefore \lambda^2 = ۰$ اور $\lambda = \frac{2 - \lambda^2}{1 + \lambda^2}$ ہو سیدان
 مساوات کی ایک سلسلہ اور λ کی قیمتوں کا حاصل ہوگا

اگر $x = 3$ تو $y = \frac{9}{10}$ اور $x = 8$ تو $y = \frac{64}{10}$

$x = 2$ $y = \frac{4}{10}$ $x = 1$ $y = \frac{1}{10}$

$x = 1$ $y = \frac{1}{10}$ $x = 0$ $y = 0$

$x = 0$ $y = 0$ $x = -1$ $y = -\frac{1}{10}$

$x = -2$ $y = -\frac{4}{10}$ $x = -3$ $y = -\frac{9}{10}$

$x = -4$ $y = -\frac{16}{10}$ $x = -5$ $y = -\frac{25}{10}$

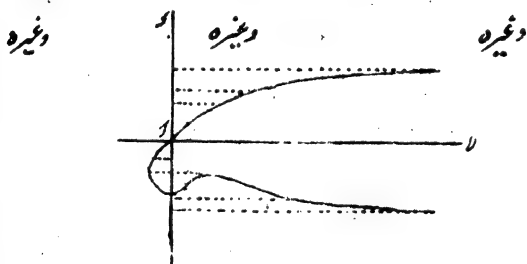
$x = -6$ $y = -\frac{36}{10}$ $x = -7$ $y = -\frac{49}{10}$

$x = -8$ $y = -\frac{64}{10}$ $x = -9$ $y = -\frac{81}{10}$

$x = -10$ $y = -10$ $x = -11$ $y = -12.1$

$x = -12$ $y = -14.4$ $x = -13$ $y = -16.9$

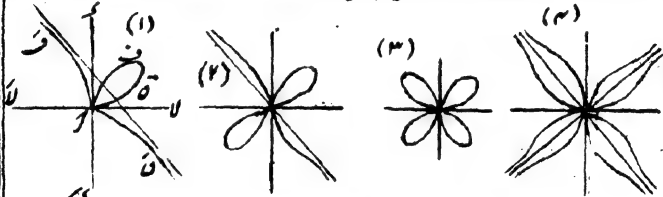
$x = -14$ $y = -19.6$ $x = -15$ $y = -22.5$



اور جبکہ $x = 0$ تو $y = 0$ یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ خط منحنی نقطہ آئین سے
گزرتا ہے فرض کرو کہ آٹا اور آٹا محور ہیں آٹا میں سے قطع کر دو قیمتیں رک کی جو کہ
جدول گذشتہ میں لکھی ہیں اور ان نقاط سے جو کہ ہو سید قیمتوں رک کی دریا

ہوئی ہیں کچھ خطوط مساوی قیمتوں لائے جو کہ جد دل گذشتہ میں لکھی ہیں
(یہ خطوط نقطہ دار خط ہیں) اس ترکیب سے بہت نقطہ خط منحنی مطلوب
کی معلوم ہوئی جنکی مدائی سے مقام خط منحنی کا معلوم ہو جاوے گا یہ مثال کو
کتاب میں سی نکا کئے ہیں جو کہ گریٹر صاحب باشندہ جینیوانی بیان خطوط
منحنی میں لکھی ہیں اور یہ ہندس شدہ میں موجود تھا اور یہ کتاب بہت سی
فائدہ مند واسطی برتنی خطوط منحنی جبریک کی ہوگی۔

(۳۱۹) دریافت کرد کو کس پس مساوت کا $5 - 5 ط لا 2 + لا = 0$ ۔



فرض کرو کہ لا بہت چوٹا ہو: لا ثابت چوٹا ہوگا اسی واسطی جبکہ اس
مقدار کو مساوت گذشتہ میں سی دور کر لیں تو حاصل ہوگا

$5 = 5 ط لا 2$ یا $3 = 5 ط لا$ اور یہ مساوت نصف قریب البیضا

مکعبی $3 ط لا$ کی ہے جو کہ شکل (۱) میں لکھی ہوئی ہے اور اگر لا بہت

چوٹا ہو تو میں حاصل ہوگا یہ $لا = 5 ط لا 2$ اور اس سے حاصل ہوگا

قریب البیضوی $3 ط لا$ یہاں سی معلوم ہوگا کہ خط منحنی کے نقطہ شروع برد و خیر

قریب البیضوی کی ہیں اور جبکہ لا نہایت زیادہ ہو تو لا بہت ہی زیادہ ہوگا

اسی واسطی لا کو مساوت گذشتہ میں سے دور کر کے حاصل ہوگا یہ $لا = 5 ط لا 2$ ۔

۱۰ = لا یہاں سی ثابت ہوتا ہے کہ واسطے مثبت آ کے لا نہایت بڑی شاخ خط منحنی کی زاویہ لا آ میں حاصل ہوگی اور واسطی منفی آ کے ایک لا نہایت بڑی شاخ زاویہ لا آ میں حاصل ہوگی۔ دریافت کرو خط متفرق الملاقات اس خط منحنی کا چونکہ مساوت اس خط منحنی کی یہ ہے

$$\frac{1}{2} \left(\frac{r}{p} b_0 - 1 \right) \dot{U} = s :: \left(\frac{r}{p} b_0 - 1 \right) \dot{U} = r \dot{U} b_0 + \dot{U} = s$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{r_s}{a} b r + \left(\frac{r}{u} \right) b + u - = \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{r_s}{a} b r - \frac{r}{u} b - 1 \right) u - =$$

$$= -a + b + \frac{c}{2} + \text{وغیره جبکہ } s = -\text{لا اسید اعلیٰ مساوت خط متفر}$$

الملاقات کی یہ ہوگی $s + \lambda = \mu$ جبکہ کینچین ہم اس خط کو اور کینچین شان
 وٹ اور ان کو طرف اس خط متفرع الملاقات کے تو ہمیں تقریباً یعنی مطلوب
 حاصل ہوگا۔ اگر مساوت یہ ہو $\mu - \mu = \mu + \lambda + \lambda = 0$ تو ہمیں

حاصل ہو گا اب خط منحنی اس مسافت کا جیسا کہ شکل (۲) میں دیکھیں

اور اگر مساوت یہ ہو کہ $a^2 + b^2 = c^2$ ، خط ممخی اس کا شکل (۲)

مثال دریافت کرد و کس اس سادت کا ۲-۳ ط ۱-۲

ترکیب گذشتہ واسطی دریافت کر لے اس قسم کی خطوط منحنی کے اوس سہالہ

حساب فزنیات میں لکھی ہوئی ہے جو کہ ملکہ صاحب مدرس کیمبرج نے لکھی ہے

میں تصنیف کیا تھا۔

(۳۲۰) بئس ایک ایسا خط ہی جسکا طول (۲ ص) معلوم کرادینا

اسکے ساتھ دوساوی دایرون کے محیط پر مین اب دریافت کرو گے۔

میں نے

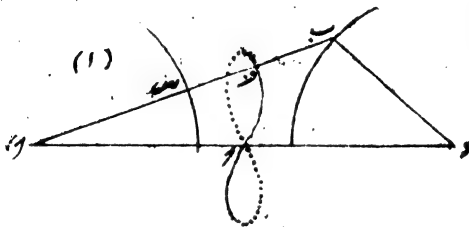
نقطہ کا جو کہ بیچ میں خط پائس کی ہر ملاؤ ایک خط درمیان نقاط
 داور داور جو کہ مرکز دو دایروں کے ہیں اور فرض کرو کہ یہی خط محور ہے اور
 نقطہ تصفیہ دو نقطہ شروع محور و تقاطع علی القوائیم کا ہے۔
 فرض کرو کہ لا اور داور داور پائس کی اور لا اور داور پائس کی اور لا اور

حادثہ کی مبین

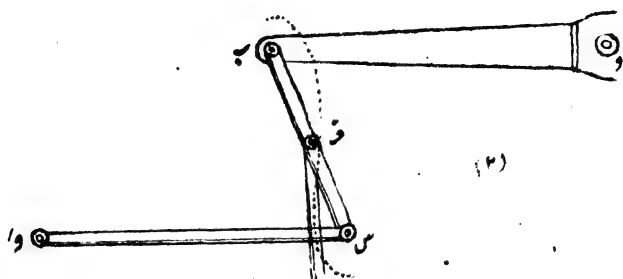
اور طاعت سر میں کہ

91 = 91

1516 =



۲۶
دستی میں اور یہ ہنر ہی کہ یہ حرکت عمود کو نقطہ یا کسی نقطہ و ب پر لگائی ہے



حاصل نہ ہوگی اب فرض کرو کہ ایک لکڑی دس گروں مرکز و کے حرکت کرتی ہے اور ملاذ نقاط ب اور س کو بوسیلہ سلاح ب س کے اور مان لو کہ سیرا عمود مذکور کا بج میں سلاح ب س کی جڑ ابوابی تو اب ظاہر ہے کہ بوسیلہ مرقومہ بالاک حرکت اسی ایک حصہ خط منحنی میں ہوگی جیسا کہ تار یک حصہ لٹسکیا کا شکل گذشتہ میں ہے اور ظاہر ہے کہ اس صورت میں عمود مذکور اسی حالت عمود میں رہتا ہے اور اب حال نقطہ ب پر نہیں ہوگا بہت سی ترکیبیں اسکی اکثر کتابوں میں لکھی ہیں اور خصوصاً ذکر خط منحنی مرقومہ بالاک پر دنی مایر و ولک میں ہے۔

(۳۲۱) واضح ہو کہ ہم بیان بحث زیادہ مرتبہ کی مساوت کی باوجود ضرورت کی یہی نہیں کر سکتے ہیں بلکہ حقیقت میں ہیں وسیلہ انکی دریافت کرنے کا نہیں ہو سکتا۔ ہم ابھی ثابت کر آئی ہیں کہ اکثر اشکال گذشتہ ایسی درستی سے معلوم ہوئے ہیں کہ اشکال ریاضی ثابت ہونی چاہئے اگر ہم اشکال گذشتہ میں بحث

اور وقت معلوم کرنے لفظ خطوط منحنی کی زلیقہ تو انحناء خط منحنی کا مرکز آسانی سے دریافت نہیں ہو سکتا اس پر اب ہم مساوت عام θ مرتبہ کا بیان کر سکتے ہیں اور بعد اسکی بیان تقاطع خطوط منحنی حیرت انگیز کا لکھیں گے *

* واضح ہو کہ طالب علم کو یہ خیال کرنا چاہیے کہ ہندسہ بالجبر کسی صورت خط منحنی کے دریافت نہیں ہو سکتی ہی مثال آئندہ کسی دریافت ہوگا کہ ہندسہ بالجبر کسی تجویز انحناء خط منحنی کا معلوم ہو سکتا ہے فرض کرو کہ θ اور ϕ تین وتر مساوی فاصلہ پر ایک دوسرے سے ہیں اب بوسیدہ کہجے ان دو تار کے خط منحنی کے معلوم ہوگا کہ مخوف طرف یا محبہ طرف خط منحنی طرف محور کے جتنا کہ $\theta < \phi$ یا $\frac{\theta}{\phi} > 1$ مثلاً دراصل مثال اس بات کی فرض کرو مساوت قریب البیضوی کہجی کے $\theta = \phi$ تو اب ظاہر ہے کہ خط منحنی محدب ہوگا اگر $\theta < \phi$ (یا $\theta < \phi$) + (یا $\theta < \phi$) + $\theta < \phi$ اور چونکہ یہی شرط مساوات گذشتہ میں ثابت ہے تو خط منحنی محدب ہی فاصلہ دو تار کا آپس میں متوفی مقدار مقررہ مساوت پر ہی۔ اور دراصل دریافت کرنے اور زاویہ کی جو کہ خط منحنی محور کو تقاطع کرینی بناتا ہی بلو نقطہ شروع اس نقطہ پر اور اب ظاہر ہے کہ خط منحنی اور ماس اس نقطہ پر ایک ہی زاویہ محور سے بناتی ہیں لیکن قیمت اور زاویہ کی ماس کی جو کہ ماس خط منحنی کا اس نقطہ پر محور سے بناتا ہی یہی ہے $\theta = \phi$ اور اسکی مختلف قیمتیں ہو سکتی ہیں مثلاً فرض کرو کہ $\theta = \phi$ جبکہ $\theta = \phi$ تو اب یہاں سے ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی نقطہ شروع پر جو کسی منحنی ہوتا ہی اب لو مثال فقرہ (۳۳) کی $\theta = \phi$ (یا $\theta = \phi$) نقطہ اوپر میں حاصل ہوگا یہ $\frac{\theta}{\phi} = \frac{\theta}{\phi} = \frac{\theta}{\phi} = \frac{\theta}{\phi}$ اور نقطہ $\theta = \phi$ پر $\frac{\theta}{\phi} = \frac{\theta}{\phi} = \frac{\theta}{\phi}$ یہاں سے ثابت ہوتا ہی کہ خط منحنی تقاطع کر کے محور سے بناتا ہی زاویہ $\theta = \phi$ کا۔

(۳۲۲) مساوات عام n درجہ کی متعدد تمام اوس کے اجزا کی یہ ہے

$$n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = n^2$$

وضوح ہو کہ اس مساوت میں تمام ممکنہ

اجزات آ اور n ہر جہر میں کہ قوای ہر ایک جز کی n سی زیادہ نہیں ہیں

تعداد اجزا کی یہ ہے $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$ یا ایک سلسلہ

جمع کا ہی چکا جز اول اور فرق عام عدد ایک ہی اور تعداد اجزا کی $(1+n)$ ہے

اور حاصل جمع اس سلسلہ کا یہ ہے $\frac{(1+n)(2+n)}{2}$ اور تعداد اجزا کی یہ ہے

مقررہ کی (نقشہ کر کی مثال n سے اگر ضرور ہو) جو کہ کسی برقوق ہنرین ہے

ایک کم تعداد اجزا کی مساوت سی ہیں یعنی $1 - \frac{(2+n)(3+n)}{2} =$

$$\frac{n(3+n)}{2} =$$

(۳۲۳) واضح ہو کہ ہر ایک خط منحنی جبر یہ n مرتبہ کا اتنی نقاط میں مسکا گذرنا

جتنی اسکی مقدار مقررہ ہیں یعنی $\frac{n(3+n)}{2}$ نقاط میں گذرنا چاہیے

جب فرض کریں ہم قیمتیں n اور n کی ہر ایک نقطہ مفروضہ برنومین حاصل

ہوگی $\frac{n(3+n)}{2}$ مختلف مساواتیں ہو سید ان مساواتوں کے قیمت مفادیر

مقررہ کی دریافت ہو سکتی ہے مثلاً مساوت عام تر اشہای مخروطی کی بعد تقسیم

کر نیچے مثال n پر یہ ہوگی $n + n + n + \dots + n + n + n = 0$

اس میں بائیں مثال میں اس واسطی ایک تراش مخروطی بائیں نقطہ نہیں سی

گذر سکتی ہیں جبکہ نکات میں ہم ادا نقاط مفروضہ کو بجائی n اور n حاصل

$$\frac{ک}{۲ک} + \frac{ک}{ک+۲ک} + \frac{ک}{۲ک} - \frac{ک}{ک+۲ک} + \frac{ک}{۲ک} + \frac{ک}{ک+۲ک} = ۱$$

اس مساوت میں صرف امثال ب کا مجهول ہی واضح ہو کہ

بعض نقص مقام نقاط مفروضہ پر ہی موقوف ہیں اور ایک خط میں دو نقطوں سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہیں اور بالفرض اگر اب انہو کو تراش مخردی

دو خط ہو جاوے گی واضح ہو کہ اسجای پانچ نقاط ایسی ہیں جیسے کہ پانچ شرطیں

صورتوں جبر میں لکھی ہوئی ہو سکتی ہیں اور چار شرطیں کافی ہو گئی اگر خط مخنی

قریب البیضوی ہو کہ چونکہ ۲ = ۳ = ۴ ایک شرط کی ہے اگر خط مخنی کا مرکز چھبجا

مقام معلوم ہو تو تین اور شرطیں کافی ہو گئی کیونکہ ہم اس صورت میں صورت مساوی کہ

فرض کریں گے $ک + ب + لا + س + لا + ف = ۰$ اگر مقام دو نقطوں

متجانس کا معلوم ہو تو صرف دو اور شرطیں کافی ہو گئی - واضح ہو کہ

یوئن صاحب نے اپنی کتاب حساب عامہ میں ایک ترکیب بوسیلة حرکت

متوازنہ کے واسطے گزرنے ایک تراش مخردی کا پانچ نقطہ نہیں سے لکھی ہے -

(۳۲۵) اگر ایک خط مخنی کو جس کے قسم معلوم نہیں سے چند نقاط مفروضہ

کے ذریعہ سے اس صورت میں واسطی فائدہ کی یہ مساوت خط مخنی کی فرض

کر لیں گے $ک + ب + لا + س + لا + ف + د + خ + ی = ۰$ اس مساوت میں سی متغیر

مقدور آسانی سے دو ہو سکتی ہیں کیونکہ ایسی خطوط مخنی کو خطوط قریب البیضوی کہتے ہیں

(تین اجزای اول مساوت گذشتہ میں قریب البیضوی معلوم ہو گا) اور مثل ایک

سلسلہ ایسی حصوں خط مخنی پر ہی جیسا کہ (۳۰۹) میں ہیں اور خطوط آسانی سے

۲۱

مسودہ کی ناممکن ہونے تو لوگوں کا نفاذ ہونے کے۔ مثال۔

۲- ر ل س ت ط و با = کوئس السکا دو خط مستقیم میں جن کی س و تین ہیں
 ۳- لا = $\frac{ا + جسد}{جم}$ لا مس ($۴۵ \pm \frac{ط}{۲}$) تو اب یہاں سی ثابت ہوتا ہے کہ
 خطوط مستقیم فقط شروع سے گزرتی ہیں اور محور آ سے زیادہ ($۴۵ \pm \frac{ط}{۲}$)

اور اس اور خط اور آد وغیرہ = لا اور لا ۲ اور لا ۳ وغیرہ تو اگر لا

اور آد اسطر جبر حرکت کریں کہ ہمیشہ متوازی اپنی رہیں تو نسبت در میان

۱۰ : ۳ :: ۳ : ۲ :: ۲ : ۱ اور لا ۱ : لا ۲ :: لا ۲ : لا ۳ وغیرہ کی مقدار مقررہ کسی

تغیر ہوگی فرض کرو کہ نقطہ شروع خط سخی کا آد اور محور آلا اور آد بعد تبدیل

کرنے نقطہ شروع ہوگئی ہیں اور فرض کرو کہ صورت مساوی کی یہی ہم

کن + (ط لا + ص) کن - ۱ + س لا کن + د لا کن - ۱ + کر لا + ل = ۰

اب فرض کرو کہ = ۰ :: س لا کن + د لا کن - ۱ + کر لا + ل = ۰ (۱)

لا = ۰ :: کن + ص کن - ۱ + کر د + ل = ۰ (۲)

قیمتین (۱) کی اس اور خط اور آد وغیرہ ہیں :: لا ۱۰ : ۳ :: ۳ : ۲ :: ۲ : ۱ وغیرہ

= ل اور قیمتین (۲) کی ات اور اتی اور آد وغیرہ ہیں ::

۱۰ : ۳ :: ۳ : ۲ :: ۲ : ۱ :: لا ۱۰ : لا ۲ :: لا ۲ : لا ۳ وغیرہ

:: س : ۱ :: اب ظاہری کہ جب محور متوازی اپنی بدلیگی تو انشال کن اور

لا میں کس طرح فرق نہیں آد کیا اس پر خط نسبت مرفوضہ بالا کی ہمیشہ یہی صورت

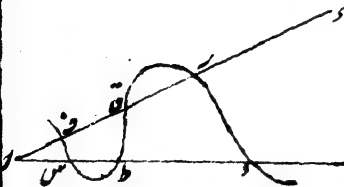
ہی کی واسطی ہر ایک متوازی

مقام آلا اور آد کے

نقرہ (۲۹۳) مثال اس لا

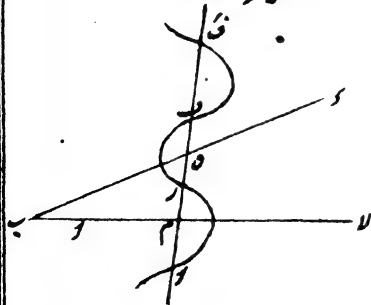
شکل کی ہی - (۳۶۹) تقریب ایک قطر کی نقرہ (۷۶) میں یہی

لا کی کردہ ایک ایسا خط ہے کہ تنصیف کرتا ہی ایک صمد متوازی و ترونگو



اس سے ہی زیادہ عام تعریف جو کہ ہر ایک صورت میں صادق آسکتی ہے یہ ہے
 قطر ایک ایسا خط ہے جس کا اگر ایک دہرا دتا رہتا تو از یہ میں سے ملتی ہوئی خط منحنی کو
 مختلف نقاط میں کہیں چاہے تو مجموعہ اوتار ایک طرف کا مساوی دوسری طرف
 کی مجموعہ کی ہوگا اور یہ شکل میں اس طرحی تعبیر ہو سکتا ہے $ف + ق + ن$
 + وغیرہ = $ر + ر + ق + وغیرہ$ اور اگر یہ تعریف صادق آوی تمام اوتار خطوں
 پر جو کہ متوازی $ق$ کی ہیں تو خط $ب$ کا قطر ہوگا۔

دریافت کرو مساوات قطر $ب$ کی فرض کرو کہ مساوات خط منحنی نسبت محمد $ا$
 اور متوازی وتر $ق$ وغیرہ کی یہ ہے $ق + (ط + ص) + ن - ۱ =$
 + $(س + لا + دلا + ی) + ن - ۲ + وغیرہ =$ فرض کرو کہ $ق = ع$
 اور $ف + ق = ع$ جبکہ لکھیں یہ قیمت مساوات گذشتہ میں تو
 حاصل ہوگا یہ $ق + (ط + ص + ن + ع) + ن - ۱ + (س + لا + دلا + ی + ن + لا + ع)$
 $\times (ط + لا + ص + ن + ع) =$ وغیرہ۔



سوائے تعریف کی مجموعہ قیمتوں
 آگے مساوی صفر کی ہونا چاہئے
 اور یہ مجموعہ سر دوسری جز
 مساوات گذشتہ کا ہی لیکن
 اس میں اسکی علامت بدلی ہوئی ہے

$ط + لا + ص + ن + ع =$ یا $ع =$ - $ط + لا + ص + ن$ یہی مساوات قطر $ب$ کا

ی ہی اور موافق اسی دلیل کے یہ مساوات $س لا^۲ + د لا + ی + ن - ا ع$
 $x ط لا + ص + ن - ا ع = ۰$ تراش محو ط کی کہی جو کہ اس طرح برکھنچی
 گئی کہ حاصل ضرب دو دو قیمتوں کے مساوی صف کی ہے۔ اس طرح سنی
 بیان چوتھی جز کا ہو سکتا ہے یہ خطوط منحنی بعض اوقات افقی خطوط منحنی کہلاتے
 ہیں۔ (۳۳۰) طریقہ دریافت کرنے مرکز ایک خط منحنی کا فقرہ (۸۱) میں
 بیان کیا گیا ہے لیکن عمل اس کا مساوات عام زیادہ مرتبہ کی میں بہت برا ہوگا
 اس پر ہم اب ایک مثال تیسری مرتبہ کی لکھیں گی جس کے وسیع سے یہ مطلب بخیر
 صاف ہو جاوے گا۔ فرض کرو کہ یہ مساوات ہے $س لا^۲ + د لا + ی + ن - ا ع = ۰$
 $+ س لا + د$ اس مساوات سے اکثر خطوط منحنی تیسے مرتبہ کی تعبیر ہو سکتی ہیں
 فرض کرو کہ $لا = م$ اور $د = ی + ن$ اس پر اعلیٰ صورت مساوات گذشتہ
 کی بعد لکھنی ان قیمتوں کی یہ ہو جاوے گی $لا^۲ + ۲ م لا + م^۲ + ی + ن - ا ع = ۰$
 $- لا^۲ - (۳ م + ب) لا + (ن - ۲ م - ۲ ب - م - س) لا + م^۲ + ی + ن$
 $- م^۲ - ب م - س م - د = ۰$ ط پر ہی کہ دوسرا اور تیسرا اور چہا
 اور اخیر یا مقدار مقررہ = کی ہونا جامی نہیں تو خط منحنی کا مرکز نہیں ہوگا
 :ن = ۰ اور م = ۰ اور ب = ۰ اور د = ۰ جس پر انسی معلوم ہوا کہ
 خط منحنی اس صورت میں مرکز رکھتا ہے اور یکساں مثال یہ اور د نہ ہوگی تو
 یہ مرکز نقطہ شروع ہوگا۔

ث غ ث

باب سیزدہم

بیان تقاطع خطوط منحنی جبریہ میں -

(۳۳۱) نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم اور ایک خط n مرتبہ کا بوسیله در کرنے کی دو مساواتوں میں سے دریافت ہو سکتا ہے یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ وہ مساوات جو حاصل ہوگی اس میں اجزائی لاکے ہوگی اور یہ مساوات درجہ کی ہوگی اسبواسطے اسکی قیمتیں بتہ ادن کے ہو سکتی ہیں اب n نقاط تقاطع ہوگی اور اسکی قیمتیں n سے کتنی ہی ہو سکتی ہیں کیونکہ بعض اسکی قیمتیں اس میں مساوی ہو سکتی ہیں اور بعض ناممکن - واضح ہو کہ ایک خط مستقیم ایک خط منحنی n مرتبہ کو n نقاط میں تقاطع کر سکتا ہے لیکن اس صورت میں خط منحنی کو صورت عام میں فرض کرنا چاہی نہیں تو تقاطع متجانس اور ضعف کے نامعلوم بیضوی کی صورت یا شہ جہی نامعلوم خط منحنی کے خیال کرنا چاہی اور پس ایک خط جو کہ ایسی نقاط میں سے گزرے گا مساوی دو یا زیادہ نقاط تقاطع کی ہو۔

(۳۳۲) نقاط تقاطع دو خط m اور n مرتبہ کے بوسیله در کرنے کی دو مساواتوں میں سے معلوم ہو سکتی ہیں اب جو مساوات کہ حاصل ہوگی وہ $m+n$ مرتبہ کی ہوگی یا اسکی $m+n$ نقاط تقاطع ہوگی یہ نقاط اکثر کم ہوتی ہیں کیونکہ تمام صحیح قیمتیں اس مساوات میں $= 0$ نقاط تقاطع حاصل ہو سکتی ہیں مثلاً اگر m درجہ n کے n کو n مساواتوں میں سے $1 = 2x - 3y - 4z$ اور $2 = 3x - 4y - 5z$ (لا - ص)

تو $1 = 2x - 3y - 4z$ یہاں چار ہوتا ہے کہ ہمیشہ ایک نقطہ تقاطع حاصل ہوگا موافق اس دتر اعرض کے $1 = 2x - 3y - 4z$ لیکن یہ ہمیشہ نہیں ہو سکتا ہے کیونکہ

اس صورت پر $2 = 2$ (۲ ص - ص) اسی واسطی ناممکن ہے اگر
 ص ۲ اور یہ کہچنی دو خطوط منحنی کی سی ظاہر ہوگا یہاں سنی ثابت ہوا
 کہ بعد معلوم ہونی وتر العرض کے ہمیں اوتار ہر ایک خط منحنی کے موافق اس
 وتر العرض معلوم کرنے چاہئیں اگر وہ صحیح نہیں ہوگی تو معلوم ہوگا کہ نوفا
 ایسی وتر العرض کی کوئی نقطہ تقاطع خط منحنی کا نہیں ہو سکتا ہے۔ اگر
 یہ دو مساواتیں ہوں $2 = 2$ اور $2 = 2$ $10 - 10 = 0$

تو بعد دور کرنی کے وتر العرض نقطہ تقاطع کی یہ ہوگی $2 = 2$ اور
 $2 = 2$ یہاں صرف قیمت اخیر سی نقطہ تقاطع معلوم ہو سکتا ہے۔
 (۳۳۳) واضح ہو کہ دریافت کر نہیں نقاط تقاطع خطوط کے ہیں آخر
 کو ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے جو دو درجہ سی زیادہ کی ہوتی ہے
 یا ایک ایسی مساوات پیدا ہوتی ہے جسکی قیمتوں کی بلکہ آسانی سی معلوم نہیں
 ہو سکتا ہے واسطی دور کرنی اس اشکال کے ایک ایسا طریقہ اکثر استعمال
 کیا جاتا ہے جسکے وسیلہ سی ایک خط تمام نقاط مفروضہ میں سے گزرے گا اور پسند
 اس ترکیب کے مقام ایسا درجہ ہو جاوے گا۔ فرض کر دو کہ $2 = 2$ (۱)

علامتوں 2 (۲) اور 2 (۲) اور 2 (۲) سی مراد جملہ آکا ہی یعنی یہ ایسی
 صورتیں ہیں صرف آکا ہی پایا جاتا ہے لیکن یہ اور مقدار مفروضہ کی ساتھ ملا
 ہو اسی اور 2 (۲) اور 2 (۲) مثلاً یہ صورتیں ہیں مثلاً اگر $2 = 2$

۲ تو $2 = 2$ یا $2 = 2$ ص ۲

اور د = ک (۱۱) (۲) مساواتین دو خطوں کی بین تو اب ظاہری کہ نقطہ
تقاطع پر وتر اور وتر العرض ان مساواتوں کی ایک ہی ہو گئی یا فرض کر دو
کہ $\frac{ع}{ح} = \frac{ا}{ح}$ اور $\frac{ا}{ح} = \frac{ک}{ح}$ اور $\frac{ا}{ح} = \frac{ک}{ح}$ اور $\frac{ا}{ح} = \frac{ک}{ح}$ اور $\frac{ا}{ح} = \frac{ک}{ح}$
اسی واسطی $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور اسکی وسیلہ سے $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ معلوم ہو سکتی
ہیں اور انکی قیمتیں برآسانی عام دریافت ہو سکتی ہیں اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$
اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اب جد جمع کرنے دو مساواتوں کے

$$\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا} \quad \frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا} \quad (۵)$$

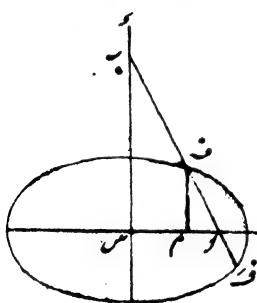
اور ضرب دینی سے $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$

بمساوت عام یہ ہو گا $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$ اور $\frac{ح}{ع} = \frac{ک}{ا}$

آسی مراد ہر ایک جگہ ہی جو کہ جمع کسی یا تفریق کسی یا ضرب دینی وغیرہ سے
(۳) اور (۴) سے یہ ہو سکتا ہے - اب ظاہری کہ ہر ایک مساوت کہتہ
میں نسبت درمیان $\frac{ع}{ح}$ اور $\frac{ا}{ح}$ جو کہ اوٹار نقطہ (۱) اور (۲) کی بین دیا
ہو سکتا ہے اور جبکہ $\frac{ع}{ح}$ اور $\frac{ا}{ح}$ کو مفاد بر غیر منقطع فرض کریں تو بوسیہ
نسبت درمیان سلسلہ نقاط کی معلوم ہوگی اور ان نقاط میں سے نقطہ تقاطع
ہی ایک نقطہ ہوگا یعنی جبکہ کہنچیں گے ہم کو کس (۵) یا (۶) یا (۷) کا وہ ضرور
نقطہ تقاطع مطلوب (۱) اور (۲) میں کسی کہڑیگا - اور ظاہری کہ اگر
مساواتوں (۵) اور (۶) یا (۷) میں کسی دائرہ یا خط مستقیم ہو تو کہنا
اس دائرہ یا خط مستقیم کا آسان ہوگا بہ نسبت دریافت کرنے نقطہ تقاطع

بوسیلہ در کرنی کسی ایک مقدار کے - واضح ہو کہ ہم اکثر نقطہ تقاطع (۱) اور (۲) کا دریافت کرتی ہیں جبکہ ایک انجین سے خط منحنی معلوم ہو بوسیلہ کہیں کو کس دوسرے مساوت کی اور یہ طریقہ بہت آسان ہوگا جبکہ دوسرا خط مستقیم ہو اب ہم چند مثالیں وسطی تفصیل مرقومہ بالا کی لکھیں گے۔

(۳۳۳) کہیں جو ماس بیضوں کا ایک نقطہ مفروضہ ق سی جو کہ اُس پر نہیں ہے فرض کرو کہ اوٹار ق کی تم اور ق میں اور ع اور ح اوٹار نقطہ ق کی ہیں جہاں کہ ماس مطلوب خط منحنی سے ملتا ہے تو اب موافق فقرہ (۱۱۱) اہم مساوات اوتار ماس کی جو کہ نقطہ ق میں سی کی گذر تھی یہ ہوگی ط و ع + ص ل ا ع = ط ص ل اور چونکہ یہ نقطہ ق میں سی کی گذر تھے تو ط و ع + ص ل ا ع = ط ص ل اور ط و ع + ص ل ا ع = ط ص ل (۲) بوسیلہ (۱) اور (۲) کا مفاد برج اور ع دریافت ہو جاوے گی قیمتیں اعلیٰ اوٹار ماس م اور م ق نقطہ مطلوب ہو



اب ظاہری کہ (۱) مساوت کے خط مستقیم کی نہیں ہیں لیکن اوسے صرف نسبت در میان ماس

اور م ق کی معلوم ہو جاوے گی لیکن اگر ہم ع اور ح کو

مقادیر غیر نقطہ فرض کریں

واضح مساوت سی نسبت در میان مختلف نقاط کی جسم سے ایک ق ای معلوم ہوگی

بوسیدگی اگر وہ خط سبکی مساوات (۱) میں کیسیجا چاہے تو وہ نقطہ ف میں سے
 گذرے گا تو اب بوسیدگی اس مساوت اور مساوت بیضوی (۲) کی مقام نقطہ ف کا
 درجہ ثابت ہو جاوے گا اور سبکی سے خط (۱) کی فرض کرو ع = ۰ = ج = صیغہ ۱۱
 فرض کرو ج = ۰ = ع = ط م اب اس دہین سے قطع کرو س ب = صیغہ ۱۲
 اور اس سے لایم سے مساوی = ط م اور ملاؤ یہ دو کو اور کہیں جو خط ب کو تو یہ خط
 کو کس (۱) کا ہو گا اور یہ بیضوی کو نقاط ف اور ق میں قطع کرے گا یہاں سے
 ثابت ہو گا کہ اگر ملاؤ دین ق اور ق ف کو تو یہی ماس مطلوب ہو گی۔

اسی طرح ماس بعد بیضوی اور قریب بیضوی کی کیج سکتے ہیں واسطی ثابت کرنے
 ایک صورت نام کہ فرض کرو کہ ط م + س لا + د د + ی لا = ۰ (۱)

مساوت دوسری ذریعہ کی خط معنی کی سی اور مان کو کہ اسکی محور متوازی اقطار شمس
 کی ہیں تو اب مساوت ماس کی نقطہ (لا اور د) پر یہ ہوگی ط م + س لا +

ف (د + د) + ی (لا + لا) = ۰ یا (ط م + د) + د (س لا + ی لا) +

+ د + ی لا = ۰ (۲) فرض کرو کہ یہ ماس نقطہ م اور ن میں سے گذرے گا
 تو اب صورت (۲) کی یہ ہو جاوے گی

(ط م + د) + ن (س لا + ی لا) + م (د + د) + ی لا = ۰ (۳)

یا (ط م + د) + د (س لا + ی لا) + ن (م + م) + د + ی لا = ۰ (۴)

اب فرض کرو کہ لا اور د (۳) میں متاویز غیر منقطع ہیں کہیں جو خط مستقیم جو کہ کو کس
 د م کا ہی بوسیدگی اسکی خط معنی کے مقام سیکٹ کا جو کہ دو نقطہ بین (ط م)

معلوم ہو جاوے گا اور اب ماس در میان نقطہ (م اور ن) کی کینچ سکتی ہیں
 (۳۳۵) اب فرض کرو کہ خط سیکنٹ (۴) کا ایک نقطہ مفروضہ (م اور ن)
 میں سے کدڑا ہی تو اس صورت میں مساوت (۲) کی یہ صورت ہو جاوے گی
 (۲ ط ن + د) ن + (۲ م م + ی) م + دن + ی م = ۰ (۵) اب
 ظاہر ہے کہ نقطہ (م اور ن) جہاں ای ماس کبھی گئی تھے ایک خاص مقام پر
 ہوں گے موافق ہر ایک خط سیکنٹ کے جو کہ نقطہ (م اور ن) میں سے گذرنا
 ہم اگر (۵) میں مقادیر م اور ن کو غیر منقطع فرض کریں تو ہمیں حاصل ہوگی
 مساوت آئندہ نقطہ (م اور ن) کی لو کر کی

(۲ ط ن + د) ن + (۲ م م + ی) م + دن + ی م = ۰ اور
 اس میں م اور ن اتنا غیر منقطع ہیں یہاں سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر
 ایک نقطہ سے مختلف سیکنٹ ایک دوسری درجہ کی خط کی کبھی جاوے اور
 دو نقطوں میں سے جہاں کہ ہر ایک سیکنٹ خط منحنی کو قطع کرتا ہے
 ایسی ماس کبھی جاوے جو کہ ملتی ہیں ایک دوسری کو تو لو کر کے ان
 نقاط کا خط مستقیم ہوگا۔

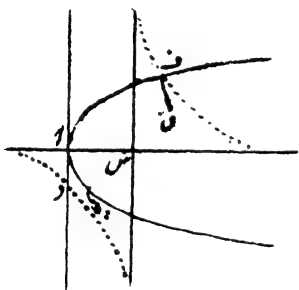
(۳۳۶) کبھی عمود ماس ایک قریب البینوی کا نقطہ (ط اور ص) میں
 سے جو کہ خط منحنی پر واقع نہیں ہے فرض کرو کہ $۲ م لا مساوت خط$
 منحنی کی ہی اور مان لو کہ $۲ م لا مساوت خط$ اتنا نقطہ مطلوب ہے کہ میں تو اب ظاہر ہے

مرکز دایره باشد چونکہ نقطہ E اور T میں EA کی سو فی نفقہ (۱) کی یہ ہوگی $C = ۱ - ۲m$ (۷ + ۷) اسکی اصلی مساوت عمود تماس کی نقطہ (۷) اور T پر یہ ہوگی $C = ۱ - ۲m$ (۷ - ۷) اور چونکہ یہ نقطہ (ط اور ص) میں کسی گزرنے والی قوس $C = ۱ - ۲m$ (۷ - ۷) یا

$$C = ۱ - ۲m \quad (۱)$$

$$C = ۱ - ۲m \quad (۲)$$

اور $C = ۱ - ۲m$ جبکہ در مرکز مینیمم C کو نو حاصل ہوگا یہ $C = ۱ - ۲m$ (ط - ۲) $C = ۱ - ۲m$ (۳) یہ ایک ایسی مساوت ہے کہ بوسیله اسکی قیمتوں کے تین وتر مطلوب حاصل ہو گئی و اصلی استعمال میں لانی اس مساوت



کی اب ہم کہیں گے لوکس (۱) کا جو کہ مساوت بعید البیضوی مساوی القطرین کی ہر محور AA' کا ایک متشعب الملاقات خط منحنی کا سو فی نفقہ (۱۹۱) کے ہی اور دوسرا

متوازی محور AA' کی ہی اور یہ فاصلہ $س پر = ط - ۲m$ نقطہ آسی ہر مساوت بعید البیضوی کی نسبت مرکز $س$ اور خطوط متشعب الملاقات کی یہ ہر $C = ۱ - ۲m$ ص علاوہ اسکی بعید البیضوی قطع کرتا ہر محور AA' کو نقطہ $د$ میں اور $د = ۱ - ۲m$ بوسیله اسکی بعید البیضوی (اور یہ نقشہ از خط منحنی شکل

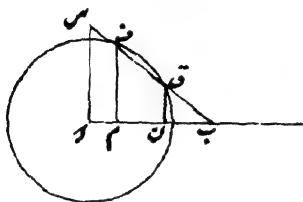
۱) $\left(\frac{p}{q} + m\right)^2 + \frac{p}{q}$ اگر چہ یہ دایرہ اس قریب البضوی میں سی گذرتا ہے لیکن وہ نقطہ نقاط تقاطع مطلوب میں نہیں ہے اور یہ صرف پیدا ہوتا ہے کہ سیلہ ضرب دینی (۱) کا نتیجہ میں اگر ایک قریب البضوی اور مختلف دایرہ موافق مقامات کی کیسی جادین تو ہمیں بخوبی معلوم ہو جاوے گا جبکہ بیشتر درشت ہو گئی اس صورت میں ایک یاد دہانہ نقطہ تقاطع ہو گئی یہ طریقہ بہت مفید ہے اس طرح سی عمود ماس البضوی کا کھنچ سکتا ہے اس میں اور شکل برقرار ہے کسی نوع کا فرق نہیں مگر اس صورت میں چار نقطہ تقاطع ہو گئی۔

(۳۳۸) واسطے رفع اوس اشکال کی جو کہ حل کرنی میں مساواتوں فقرات گذشتہ کی جو کہ دور کرنے سے حاصل ہوئے ہیں نقاط تقاطع کا استعمال کیا گیا تھا لیکن اب ہم ایک عام قاعدہ کہہ دیں گے اور اس کے وسیلے سے خطوط منحنی حل کر کے مساوات پر موقوف رہیں گی اور جو تہ دو مساواتوں کے ملائی سی ایک ایسی مساوات حاصل ہوتی ہے کہ اس کی قیمتوں سے نقطہ تقاطع اوکلی کوکس کا دریافت ہو جاتا ہے اس طرح سی ایک مساوات کو دو مساواتوں میں حل کر کے اوکلی کوکس معلوم ہو گئی ہیں اور اوکلی تقاطع سے قیمتیں ایک مساوات کی معلوم ہو جاوے گی۔

اسی طریقہ کو بنانا مساواتوں کا کہتی ہیں اور اس طریقہ کو متقدمین بیشتر ایجاد کرنی قواعد تقریبی کے استعمال کرتی تھیں اور یہ اب بھی اکثر اوقات بہت فائدہ مند ہوتا ہے اس لیے اب ہم اس کو بیان کریں گے فرض کرو کہ یہ دو مساواتوں میں
 $k = u + v$ (۱) اور $k' = u + v'$ (۲) اب یہ دو مساواتوں کو

یا کجی

یہ حاصل ہوگا لا - ط لا + ط - ط = (۳) یا ہر ہی قیمتیں (۳)
 کی دتر العرض نقاط تقاطع (۱) اور (۲) کو کس کی ہیں یکین برعکس کے
 بوسیدہ کجی کو کس (۱) اور (۲) کی اور باہنی دتر العرض نقطہ تقاطع کے
 قیمتیں (۳) کی معلوم ہو سکتی ہیں۔ اب اگر بطریق ہندسہ کی معلوم کرنا
 قیمتوں (۳) کا مطلوب ہو تو اب حل کرد اس مساواتوں (۱)
 اور (۲) میں اور فرض کر دو کہ سن ق ب کو کس (۱) کا ہی اور دایرہ
 سن ق (۲) کا اور ان دونوں کا نقطہ شروع اور محراب ایک ہی ہیں کیچو تو مار
 م ق اور ان ق کو نو اب ظاہر ہی کر دوں



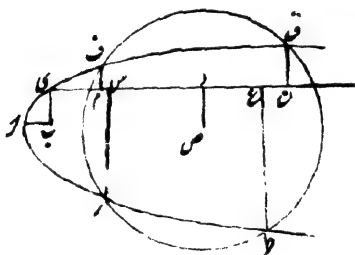
اور ان قیمتیں (۳) کی ہوگی۔ اس طریقہ
 کی تفصیل یہ ہے کہ ایک مساویہ کو دو مساواتوں
 میں اور اب کجی کو کس ان دونوں مساواتوں کا

اور چونکہ یہ ظاہر ہی کہ بہت سی ایسی مساواتیں جو اگر ملائی جاویں تو اولیٰ
 مساوت مطلوب پیدا ہو جائیگی اس طرح بہت سی کو کس ایسی ہو سکتے ہیں جنکی
 نقاط تقاطع سی قیمتیں مطلوب حاصل ہوگی مثلاً مساوت (۳) دو مساواتوں
 آئندہ میں حل ہو سکتی ہے لا = ط اور ط - ط لا = ط - ط =

اب جس وقت کہ کجی کے ہم انکی کو کس کو جو کہ قریب المیضوی اور خط مستقیم
 ہیں تو انکی تقاطع سی قیمتیں (۳) کی دریافت ہو جائیگی۔ واضح ہو کہ قیمتیں
 ایک مساوت کی دریافت ہو سکتی ہیں بوسیدہ تقاطع ایسی دو قسم کی خط منحنی کے

۲۹۱
 جبکہ حاصل ضرب اولی قوتوں کا مساوی قوت مساوات کی ہو تو اب ظاہری کے
 ایک خط مستقیم اور ایک تیسرے مرتبہ کی خط منحنی سے ایک مساوات تیسری مرتبہ کے
 حاصل ہوگی اور کوئی سی دو تراشوں مخدوطی سے مساوی دو دایروں کے قسبتین ہونے
 درجہ کی مساوات کی حاصل ہو سکتی ہیں۔
 (۳۳۹) چونکہ مساوات تیسرے درجہ کی اگر کتب ریاضی میں متعل
 ہوتی ہیں اس لیے اب ہم پوری جوتی مساوات کو حل کریں گی اور اس میں کوئی فرد
 محذوف نہیں ہوگا $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = 0$ یہاں دایرہ
 اور قریب البیضوی کو جنکا بیان بہت آسان ہے پس کرنا چاہئے بعد فرض کرنی مشاء
 قریب البیضوی کی ہم ایک خاص ترکیب سے مساوات دایرہ کی حاصل کریں گے

(۳۲۹) چونکہ مساوات میں تیسرا اور چوتھی درجہ کی اکثر کتب ریاضی میں متعل
ہوتی ہیں اس لیے اب ہم پوری چوتھی مساوت کو حل کریں گی اور اس میں کوئی فرد
محذوف نہیں ہوگا $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 = 0$ یہاں دائرہ
اور قریب البیضوی کو جنکا بیان بہت آسان ہے پس کرنا چاہئے بعد فرض کرنی مشاء
قریب البیضوی کی ہم ایک خاص ترکیب سے مساوت دائرہ کی حاصل کریں گے

[illegible]

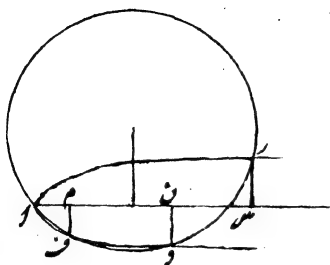
$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = 0$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + (r + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = 0$ (۱) کا قریب البیضوی ایسی
 ہی جس کے لفظ شرفوعی ہی (بی = $\frac{1}{2}$) اور اوتار متقاطع علی القوام
 ہیں اور لوکس (۲) کا دائرہ $\frac{1}{2} - r$ ہے اور اوتار اس کی مرکز کی $\frac{1}{2}$ اور
 دس ہیں اور نصف قطر اس دائرہ کا (۲) سی دریافت ہو سکتا ہے قیمتیں مساوی
 کی اس طرح پر کچھ چیزیں کہ $\frac{1}{2} - r$ اور $\frac{1}{2} + r$ اور $\frac{1}{2}$ منفی ہیں
 اگر ایک دائرہ ایک قریب البیضوی سی سی کرے تو دو قیمتیں پسین مساوی
 ہو گئی اور صورتیں تین یا چار مساوی قیمتوں کی ہو سید قواعد تاس کے معلوم ہو سکتی
 ہیں اور چونکہ دو قیمتیں واسطے اختصار کرنے مساوات کی طرف درجہ دوم کی کافی ہیں
 اس لیے اعلیٰ ہیں بیان ان صورتوں کا ذکر کرنا کچھ ضرور نہیں ہے اگر صرف دو نقطہ
 تقاطع ہوں تو دو قیمتیں ناممکن ہو گئی اور اگر کوئی نقطہ تقاطع کا نہ ہو تو چاروں
 قیمتیں ناممکن ہو گئی۔ $\frac{1}{2} - r$ $\frac{1}{2} + r$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$
 (۳۴۰) ہو سید دور کرنے جزویم مساوات کے عمل میں بہت آسانی ہو جائی
 تھی واسطے حاصل کرنی قیمتوں مساوات کی فرض کر دیکر یہ ایک مساوات ہی
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{1024} = 0$ (۱) فرض کر دے کہ $\frac{1}{2} - r$
 تو صورت مساوات مرقومہ بالا کی یہ ہوگی $\frac{1}{2} - r + \frac{1}{4} - r + \frac{1}{8} - r + \frac{1}{16} - r + \frac{1}{32} - r + \frac{1}{64} - r + \frac{1}{128} - r + \frac{1}{256} - r + \frac{1}{512} - r + \frac{1}{1024} - r = 0$ (۲)
 اب فرض کر دے کہ $\frac{1}{2} = r$ (۳) اس واسطے کہ $\frac{1}{2} - r = 0$ $\frac{1}{4} - r = 0$ $\frac{1}{8} - r = 0$ $\frac{1}{16} - r = 0$ $\frac{1}{32} - r = 0$ $\frac{1}{64} - r = 0$ $\frac{1}{128} - r = 0$ $\frac{1}{256} - r = 0$ $\frac{1}{512} - r = 0$ $\frac{1}{1024} - r = 0$
 جمع کرنے سے $0 = r - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} - \frac{1}{512} - \frac{1}{1024}$

$$2 + 5 = 7 \quad \therefore 5^3 - 5^2 - 5^1 - 5^0 = 0 \quad \text{اب فرض کرو کہ}$$

$$= 512 - 0.125 - 0 \therefore (1) \quad = 0.5$$

$$= 112 - 2j + 512 - 2 \therefore$$

$$(r) \angle r = \frac{r}{2}(4-1) + \frac{r}{2}(4-5) 6$$



میں قیمتیں کی شکل سے یہ حاصل

ہوتی ہیں ۴ اور ۱ اور ۳

ہیو اسی قیمتیں لاکھ یہ ہو گئی ۶ اور ۱۱ اور ۱۱ مثال (۶) یہ ۳۵ + ۳۵

۵۔ اس کی ایک قیمت ممکن ہو جو تقریباً $\frac{1}{10}$ مثال (۳)

۳-۲-۱ = واضح ہو کہ دریافت کر نہیں لوگس ان مساواتوں کی

تسبیح منحل نہیں ہو سکتی، جو حکیم ہم ایک ایسی قریب البصویٰ حکمت و تراش

ایک ہی بہت صحیح طور سے کہہ سکتے ہیں کہ یہ فائدہ مند اکثر مسائل تو نین ہوگی۔

(۳۴۲) دریافت کرو دو وسط فی النسبتہ در میان دو خط معلوم ط اور

حق کے فرض کرو کہ، اور آ دو خط مطلوب ہیں آسیو اسطی

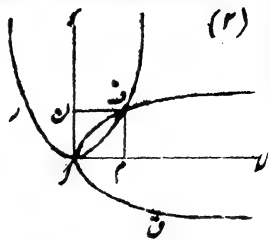
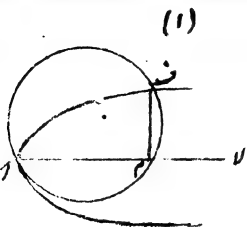
$$(1) \quad U_b = \frac{r}{s} \therefore U:s :: s:b$$

(۲) $\therefore \text{لا} : \text{لا} :: \text{لا} : \text{ص} \therefore \text{لا} = \text{ص}$

$\therefore K^2 = P^2 L^2 = P^2 \times \frac{1}{\lambda^2} = \frac{P^2}{\lambda^2}$

پھر حاصل ہوگا $z^2 - 2z + 1 = 0$

$$(3) \quad \frac{r_a + r_b}{2} = r\left(\frac{b}{a} - 1\right) + r\left(\frac{a}{b} - 1\right)$$



فرض کرو کہ $\frac{ن}{م}$ قریب البیضوی (۱) ہی تو اب تقاطع کرنے دایرہ (۳) سے
 $\frac{م}{ن}$ اور $\frac{م}{م}$ دو وسطی نسبت مطلوب دریافت ہو جائیگی اور قیمتیں
 $\frac{ن}{م} = ۳$ - ط ص = . ناممکن ہیں - یہ شکل متقدمین ریاضی دانوں میں بہت مشہور
 تھی - ریجنی نے جسے اخطا طوں کے مدرسہ میں تعلیم بائی تھی اس شکل کو حل کیا تھا
 اسکی ترکیب واسطے حل کرنے اس شکل کے بہت آسان ہی سہ واسطے اسکو ہم بیان
 کر سکتے ہیں۔ پہلے ایک قریب البیضوی $\frac{ن}{م}$ شکل (۲) میں جسکا وتر آتش $\frac{ن}{م}$
 ہی اور کچھ قریب البیضوی $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{م}{ن}$ پر جو کہ $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{م}{ن}$ کا وتر آتش ہے
 تو اب سطح $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{م}{ن}$ یا $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{م}{ن}$ مساوی مربع $\frac{ن}{م}$ کی ہر تو اب $\frac{ن}{م}$ ہی
 کہ $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{م}{ن}$ اور $\frac{ن}{م}$ مقادیر متناسب ہیں اور سطح $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{م}{ن}$ یا $\frac{ن}{م}$
 اور $\frac{م}{ن}$ مساوی مربع $\frac{ن}{م}$ کی ہر $\frac{ن}{م}$ اور $\frac{م}{ن}$ اور $\frac{ن}{م}$ مقادیر
 متناسب ہیں کی یہاں سے حاصل ہو گئی یہ نسبتیں $\frac{ن}{م} : \frac{م}{ن} : \frac{ن}{م}$ اور $\frac{ن}{م} : \frac{م}{ن} : \frac{ن}{م}$
 اور $\frac{ن}{م} : \frac{م}{ن} : \frac{ن}{م}$ اور $\frac{ن}{م} : \frac{م}{ن} : \frac{ن}{م}$ اور $\frac{ن}{م} : \frac{م}{ن} : \frac{ن}{م}$ اور $\frac{ن}{م} : \frac{م}{ن} : \frac{ن}{م}$
 متناسب ہیں - ریجنی نے ایک اور طریقہ جو کہ قریب البیضوی اور بعد البیضوی
 پر موقوف ہے واسطے حل کرنے اس شکل کے لکھا ہے - $\frac{ن}{م} : \frac{م}{ن} : \frac{ن}{م}$

(۳۴۳) دریافت کرد ایک کعبہ جو در دو چند ایک کعبہ مفروض کا ہو۔ فرض کر دو کہ
 ط ایک ضلع ایک کعبہ مفروض کا سی اسو اسطے وہ مساوت جسکا حل کرنا ہم پر ہوگی
 $۳ = ۲ط + ۲$ یا $۲ط = ۳ - ۲ = ۱$ فرض کر دو کہ $ط = ۱$ (۱)

$۲ط = ۲$ یا $۲ط = ۲$ یا $۲ط = ۲$ سیو اسطے جمع کرنی یہی حاصل ہوگا
 $۳ - ۲ط = ۱$ یا $۳ - ۲ = ۱$ (۲) جبکہ کچھ جگہ ہم لوکس (۱) اور (۲) کا
 تو وترم ق جو کہ انکی تقاطع سی پیدا ہوگا ایک ضلع کعبہ مطلوب کا ہوگا۔

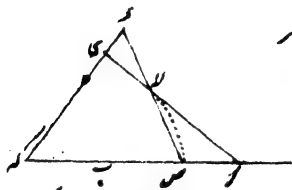
اس شکل کی ثابت کرنی میں مثل شکل مرقومہ بالا کی مہندسان تقدیمین نے بڑی کوشش
 کی تھی اونکو معلوم ہوا کہ یہ شکل پہلی شکل پر موقوف کیونکہ اگر $ط = ۲$
 تو اب وہ مساواتیں جو کہ موافق اس فرض کے حاصل ہوگی ایک سی ہوگی اسطے
 ایک ایسا کعبہ دریافت ہو سکتا ہے جو کہ ایک کعبہ مفروض سے ہم گن بڑا ہوگا۔

(۳۴۴) واضح ہو کہ ہم اسطے جس بہت سی وسط فی النسبت دو مقداروں مفروض
 کی فرض کر سکتے ہیں کیونکہ اگر کہ مقدار اول وسط فی النسبت میں سے ہو تو اونسلسلہ
 آئندہ پیدا ہوگا ط اور ۲ اور $\frac{۲}{۳}$ اور $\frac{۲}{۳}$ وغیرہ فرض کر دو کہ چار وسط
 فی النسبت ہیں اور اگر چہا جز سلسلہ کا ص ہو تو $\frac{۲}{۳} = ص$ یا $۲ - ط = ص = ۰$

اب بناؤ ایک قریب البینوی جسکی مساوت یہی $ط = ۲$ اور کچھ لوکس اس
 مساوت کا $۲ - ط = ص = ۰$ چاہے کہ لوکس اسکا شاخین بعید البینوی
 کی ہر ایک زاویہ $۲ - ط$ اور $۲ - ط$ میں ہوگی تو اب اوتا موافق صحیح قمریہ کا
 دریافت ہو سکتے ہیں۔

(۳۴۵) واضح ہو کہ نیوٹن صاحب نے مساواتوں کو بوسیدہ کن کو اوٹو میڈین
 کی بنیاد پر اور اوسے یہی بیان کیا تھا کہ مساواتوں کے بنانی میں اور خطوط
 منحنی کو استعمال کرنا چاہی جو بہت آسان ہوں اس پر وسطی اسٹی کن کو اوٹو کا استعمال
 کیا کیونکہ صرف یہی خط بعد دایرہ کی بہت آسان ہے اور آگے وسطی اسٹی کن کی کبھی فقہ
 (۳۱۲) میں لکھا گیا ہے مثال آئندہ ایک مثال اوں مثالوں میں سے ہی جو کہ
 نیوٹن صاحب کی کتاب بولی درسل میں لکھی ہیں۔ فرض کرو کہ یہ مساوت ہے

$$L + F + R = 0$$
 کہیچو ایک خط مستقیم کہ آجکا طول = L کہیچو میں سے
 قطع کرو کہ $R = 0$ اور تنصیف کرو کہ L کو نقطہ ص پر کہ کو مرکز کردا
 کہیچو ایک دایرہ جکا نصف قطر کہ ص ہو اور



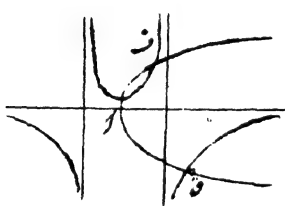
کہیچو اندر اس دایرہ کی خط ص $L = 0$
 اب خط اول کا اور کہیچو ص L اور

اول کو اعداد بناؤ خطی و کا مساوی ص کو کے اس طرح پر کہ اگر خطی و کو
 کہیچو نوہ نقطہ کہ میں سے گزری تو اب بوسیدہ ہندسہ کی ثابت ہو سکتا ہے کہ
 مساوت وسطی طول L کی یہی $L + F + R = 0$ یعنی L ا قیمت اس
 مساوت کی ہے واضح ہو کہ خطی در میان ص L اور اول کے بوسیدہ کن کو اوٹو
 کہیچو سکتا ہے فرض کرو کہ نقطہ کہ کا قلاب ہے اور اولی قاعدہ ہے اور ص
 خط منحنی ہے تو اب بوسیدہ اس کن کو اوٹو کے نقطہ کا اس طرح سے معلوم ہو سکتا ہے
 کہ $R = 0$ — یہ کتاب اصول عامہ حساب میں ہی

۳۴۶) واضح ہو کہ زیادہ مرتبہ کی مساوات میں ترکیب گذشتہ فارمہ مندرجہ ذیل ہوگی کیونکہ میں صورتوں میں خطوط منحنی درست سے نہیں کھینچ سکے ہیں اس ترکیب سے استفادہ فرمائیے ہو تا ہے کہ اس سے چند ناممکن قیمتیں ایک مساوات کی معلوم ہو جائیں اور اسکے وسیلہ سے ہم تقریباً مقام نقاط تقاطع خط منحنی کا دریافت کر سکتے ہیں لیکن مقام نقاط تقاطع درست سے معلوم نہیں ہوگا۔

مثال ۲۔ $x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ فرض کرو کہ $x^2 = 1$ (۱) $x^2 = 1 + 5x - 1 = 0$ (۲)

یا $x = \frac{1}{x-1}$ لوکس (۱) کا قریب البیضی فارق ہر



اور لوکس (۲) کا خط منحنی تیسرے

مرتبہ کا ہوگا اور ظاہر ہے کہ تین

نقاط تقاطع ہوگی اس لیے تین ممکن

قیمتیں ہوگی دو مثبت اور ایک منفی۔

۳۴۷) واضح ہو کہ استمال کرنا خطوط منحنی کا واسطی معلوم کرنے قیمتوں کی بالکل

صحیح نہیں ہوتا ہے جتنی فقرہ (۳۴۶) میں بیان کیا ہے کہ بعض اوقات صحیح قیمتیں

مطابق ناممکن نقاط تقاطع کی ہوتی ہیں اس لیے جب ناممکن نقاط تقاطع یا ہوں

نقاط تقاطع سے یہ ثابت نہیں ہوتا ہے کہ صحیح قیمتیں نہیں ہیں واسطی ثبوت

اس مطلب کے فرض کرو کہ یہ ایک مساوات ہے $x^3 + 15x^2 + 1 = 0$ فرض

کرو کہ $x^2 = 1$ (۱) اس لیے $x^2 = 1 + 15x - 1 = 0$ (۲) یہاں سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگرچہ لوکس (۱) اور (۲) کی آکس میں تقاطع نہیں کرتے لیکن

لیکن ہر ہی دو ممکن قیمتیں میں تو اب ظاہر ہے کہ غلطی خط منحنی (۱) کی فرض نہ کرنے میں تھی جو کہ صرف تمام مثبت میں واقع ہی حال آنکہ صورت مساوات سی معلوم ہوتا ہے کہ اس کی منفی قیمتیں میں اور جبکہ لو کس قریب البینوی اور دائرہ کہ فرض کریں تو قیمتیں مساوت کی یہ حاصل ہو گئی - ۱ اور ۲ یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ واسطی دریافت کرنے قیمتوں کے دوسری زیادہ خطوط منحنی کا استیصال کرنا چاہئے

باب چہارم

خطوط منحنی غیر حسب کے پانچ

(۳۴۱) فقرہ (۲۳) میں بیان کیا گیا ہے کہ اون مساواتوں کو جنکی صورت محدود اور صحیح صورت جبر یہ ہو تو انکو غیر جبر یہ کہتی ہیں اس قسم کی ہر مساوات میں $x = \sqrt{y}$ اور $y = \sqrt{x}$ باب دوازدہم میں ہم نے مساواتیں خطوط منحنی کی جو یہ بعض خواص ہندسہ کی دریافت کی ہیں لیکن بعض خطوط منحنی ایسی ہیں جو کہ جو سید جبر مقابلہ کے تعبیر نہیں ہو سکتی ہیں یعنی وہ مساواتیں مقابلہ علم مثلث اور لوگارٹم پر موقوف ہیں اس واسطی انکو مساواتیں غیر جبر یہ کہتی ہیں - ہم بیان دریافت کر چکی مساواتیں اس قسم کی اور خطوط منحنی کی جو کہ بہت مشہور ہیں اور بعض مشہور خاصیتیں انکی یہ بیان کی گئی ہے لیکن وہ کجالی حساب جزئیات و کلیات سے دریافت ہو سکتی ہیں -

(۳۴۲) اس قسم کی خطوط منحنی میں بعض ایسی خطوط منحنی ہیں جیسے کہ کارڈی اوئیڈ جنکے مساواتوں کو اجزاء محدود جبر یہ میں لکھ سکتے ہیں لیکن یہ خطوط منحنی

بعض صورتیں خاص غیر جبرہ کی ہیں جو کہ باقی تمام خطوط منحنی سے بغیر ریاضی کے جدا نہیں ہو سکتے ہیں بعضی خطوط غنی غیر جبرہ کو خطوط منحنی آدائی کہتے ہیں کیونکہ وہ حرکت متواتر سے بن سکے ہیں لیکن یہ تیسرے خط معلوم ہوتی ہیں کیونکہ تمام خطوط اسپیٹورسی کہے جاتے ہیں۔

بیان خطوط منحنی لوگارٹمی کا

(۳۵۰) خط منحنی ق ب د کو جس کا وتر العرض و م لوگارٹم ورم و کا ہے خط منحنی لوگارٹمی کہتے ہیں۔ فرض کرو م = لا اور م = لا ایسا خطی موافق شرط سفر فرض کے



لا = لوگ و یعنی اگر ط

عدد بنیادی لوگارٹم کا ہو

تو د = ط و د یعنی دریافت کرنے سے تمام خط منحنی کے فرض کرو کہ لا = ۰

۱ = ط = لا اب جبکہ لا زیادہ ہوتا جاوے گا ۱ سے ۰ تو زیادہ ہوتا

شروع کرے گا آسی ۰ اور جبکہ لا زیادہ ہوتا جاوے گا ۰ تو آگے

جاوے گا آ سے سفر تک آ میں سے قطع کرو اب ۱ واحد خطی کے جواب

ط اب یہی کہ خط منحنی داہنی طرف اب کی پہلے ہی اور اس طرف محور آسی دور ہوتا

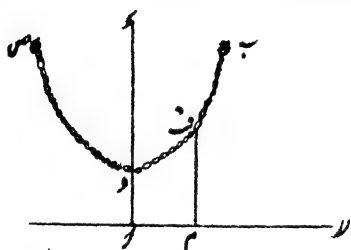
جاتا ہی اور بائیں طرف م اس کی پاس آتا جاتا ہی اور یہ اس کے خط سفر

ہی۔ اس خط منحنی کو جس پر گریجی حساب کی ایسی دیا جاتا اور انگریز حساب نے

دریافت کیا کہ اگر ماس و ط و م سے نقطہ ط پر ملی تو م ط مساوی ایک مقدار

مقررہ (پہلو) کی ہر اور آؤنی یہی معلوم کیا کہ سطح م ف ل لا جو کہ لانیہ
 پہلی ہی طرف ل لا کے محدود ہی اور یہی ہر دو چند مثلث م ط کی ہر اور وہ ہم
 جو کہ گردش اس سطح سے گرد ل لا کے پیدا ہوگا مس ب ا پ گنی اور سر مخروط کی
 ہی جو کہ پہرنی مثلث م ط کی سہی گرد ل لا کے پیدا ہوگا اگر چہ مجدد ہونا اس میں
 اور سطح کا عجیب معلوم ہوتا ہی گزردہ اشخاص کہ جو جمع کر سکتے ہیں ایسی سطحوں کو
 جس کے اجزاء لانیہ تک گھٹی جاتی ہیں اس میں تعجب نہ ہوگی اگر صوت مساوت کی
 یہ ہو $\epsilon = \phi$ تو اس صورت میں ہی خط لوگاریتمی حاصل ہوگا لیکن طرف مقابل میں
 نسبت ϕ کی واقع ہوگا یعنی محور ϕ کی منفی سمت کی طرف واقع ہوگا۔

(۳۵۱) مساوت خط فنیہ کی جو کہ لکائی ایک زنجیر یا رستہ کے سی در بیان
 دو نقاط اور ϵ کے پیدا ہوتا ہی یہی $\epsilon = \frac{1}{\phi} (\phi + \epsilon)$ اس میں



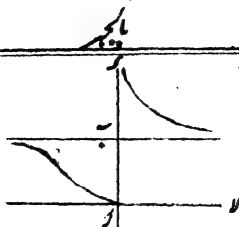
م = لا اور م = ϵ

اور $\phi = 1$ یہ مساوت

پہلے آسان قواعد ہند

بالجیر کے حاصل نہیں ہو سکتی

لیکن پہلے اس مساوت کی مقام خط منحنی کا دریافت ہو سکتا ہی جمع کرنی آوا
 اون دو لوگاریتمی سطحوں کی سہی چکی مساوتیں یہ ہیں $\epsilon = \phi$ اور $\epsilon = \phi$
 (۳۵۲) دریافت کرو کہ کس اس مساوت کا $\epsilon = \phi$



(۳۵۳) دریافت کرد اس خط منحنی کو جسکی مساوت یہ ہے $x = 1$ فرض کرو

$y = 0$ اور فرض کرو کہ $x = 1$ یا $x = 1$ در میان $y = 0$ اور

$y = 1$ کی ہمیں قیمت کی عدد آسکی حاصل ہوگی اور اگر $x = 1$ سے زیادہ

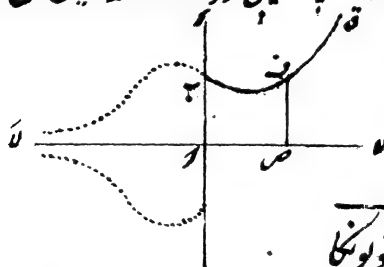
جائی تو یہی لامتناہیت بڑھیکے یہاں سنی معلوم ہوا کہ اگر $x = 1$ اور $y = 1$ تو حاصل

ہوگی نہیں شاخ $y = 1$ کی مطابق مثبت قیمتوں کی فرض کرو کہ $x = 1$ اور $y = 1$

$y = 1$ اب اگر فرض کریں متواتر ترین قیمتیں $x = 1$ اور $y = 1$ اور $x = 1$ کی تو

ظاہر ہے کہ $x = 1$ مثبت یا ناممکن یا منفی ہوگا یہاں سنی ثابت ہوتا ہے کہ خط منحنی مشتمل

ہونا چاہیے تمام اون نقاط سی جو کہ اوپر اور نیچے محور x کے علمہ و علمین واقع ہوگی



چنانچہ حال اسکا بخوبی

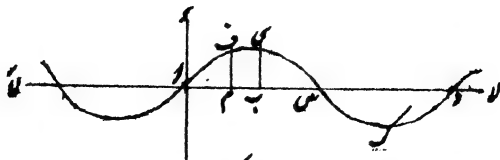
شکل مرقوم ذیل معلوم ہوگا

بیان خط منحنی چیبستو یونیکا

(۳۵۴) خط منحنی $y = 1$ کی مساوت یہ ہے $x = 1$ اور $y = 1$ چیبستوی دتر العزم

آرم اور $x = 1$ کی ہیں خط منحنی چیبستو یونیکا کہتی ہیں - فرض کرو کہ $x = 1$ اور

آرم $y = 1$ تو اب ظاہر ہے کہ مساوت اس خط منحنی کی یہ ہے $x = 1$ جس $y = 1$



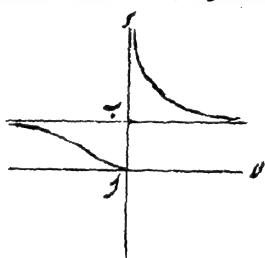
یا $\frac{1}{2}$ = ر جس $\frac{1}{2}$ قطع کرد و $\frac{1}{2}$ = کپڑ اور $\frac{1}{2}$ = کمر اور

۵	۴	۳	۲	۱	
۲	$\frac{۳}{۲}$	کمر	$\frac{۱}{۲}$	۰	قیمتین ک
۰	-	۰	ر	۰	قیمتین ک

و $\frac{1}{2}$ = کمر تو (۱) سی معلوم ہوگا کہ خط منحنی کا ستا ہی محور کو نقطہ آبر اور (۲) اگر $\frac{1}{2}$ = ر تو خط منحنی نقطہ سی میں سے گذرے گا اور یہ نقطہ سب نقاط خط منحنی سی بلند ہی کیونکہ در میان (۱) اور (۲) کی تو زیادہ ہوتا ہی لیکن وہ در میان (۲) اور (۳) کی گستا ہی اور خط منحنی محور کو پیرس بر کا ستا ہی اور اس میں تو منحنی ہوتا جاتا ہی جب تک وہ مساوی - ر کی ہو جاتا ہی اور اسر جا ہی گستا شروع کرتا ہی جب تک وہ صفر ہو جاتا ہی تو اب موافق اسکی ایک دوسری شاخ سے کہ د کی مساوی اور شاخ پہلی شاخ کے حاصل ہوگی پری ڈ کی آ سیطرہ رہتا ہی اور خط منحنی اس سیطرہ سے لانا ہی پیلتا ہی اور چونکہ جس (- ل) = - جس ل تو یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ بائیں طرف تو کسی سی خط منحنی پیلتا ہی موافق پہلے کی - سیطرہ سی خط منحنی جیب التمام اور جیب معکوس اور ماس وغیرہ کی معلوم ہو سکتی ہیں

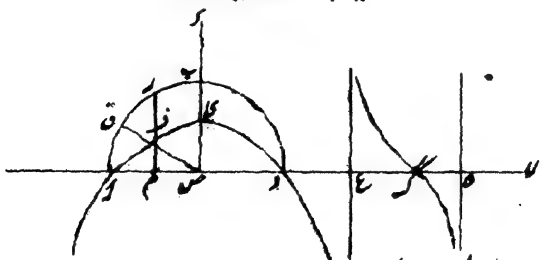
یا پچھر
 او تار خط منحنی جب مستویوں کو زیادہ یا کم کرین موافق ایک خاص نسبت کی تو وہ مساوی
 ہوگا موافق اس فرض کے حاصل ہوگی یہی (۱-۲) م حسن لا) اور یہ خط منحنی جو سیل
 حرکت تاروں موسیقی کے پیدا ہوگا اسو اسطی اس خط منحنی کو خط منحنی تار موسیقی یا
 کیمیاں کہتے ہیں۔

(۳۵۵) شکل آئیدہ متعلق ہی اس خط منحنی سے جسکی مساویات یہ ہے $y = \frac{1}{x}$ لا سلا
 ایسی خطوط منحنی فایده مند ہوتی ہیں واسطے معلوم کرنے قیمتوں مساویات کی مثلاً
 لا سلا = ط اگر کہچین ہم خط منحنی کو اور قطع کرین تو دین سے $y = \frac{1}{x}$ اور



نقطہ ب کسی کچھ ایک خط متوازی
 والا کے تو اب ظاہری کہ اوٹا نقطہ
 تقاطع اس خط مستقیم اور خط منحنی
 متین یعنی لا سلا کی ہوگی۔

کو اوڈیٹر کس کی بیان میں



(۳۵۶) فرض کرد کہ ص نہ کر دایرہ او ب دکاہی اور فرض کرد کہ وتر م ر سرگنا
 نقطہ آ سی ب ص کہ حرکت ایک شان سے جبکہ نصف قطر ص ق حرکت کرتا ہی کرد نقطہ

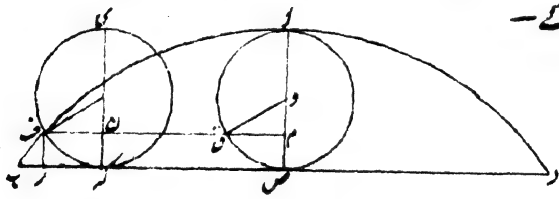
ص کے ثواب نقطہ تقاطع و خط م ر اور ص ف کا خط منحنی کو اور م ر کس بناؤ یکا فرض
 کر دو کہ تو نقطہ شروع اور م = لا اور م ف = ک اور ا ص = نق اور نہادیہ
 و ص ق = ر ثواب ظاہر ہو کہ م : ا ص :: ق : ب یعنی لا : بی :: ق : ر
 :: کہ بی = ر = کہ لا لیکن م ف = م ص م ر :: ک = (بی - لا) م ص کہ لا
 اور یہی سادہ خط منحنی کی ہے جبکہ لا = ۰ تو ک = ۰ یا خط منحنی نقطہ سے لے کر
 اور جبکہ لا = بی ق تک زیادہ ہوتا جاتا تو ک بھی بڑھتا ہی ہو کہ ماس جلدی زیادہ
 ہوتا ہی بہ نسبت زیادہ کے اور جب لا = نق = و ص تو ک = بی اور قیمت اسکی
 بوسیلہ حساب غریبات کی طرف دریافت ہوگی یہاں ہی معلوم ہو کہ اگر ص ی = کہ
 تو خط منحنی نقطہ سے لے کر نہادیہ اور جبکہ لا زیادہ ہوتا ہی ق سے تو مقدار ماس
 کم ہوتی ہے اور علامت اسکی منفی اور اسطرحی علامت (بی - لا) منفی ہوتی ہے
 یا کہ مثبت ہوگا اور یہ گشتا جاتا ہی اور جبکہ لا = نق = و د تو ک مساوی بی
 ہو جاتا ہی اور جبکہ لا زیادہ ق سے ہوتا ہی تو مقدار ماس مثبت ہوتی ہے اسطرح
 کہ منفی ہے اور یہ زیادہ ہی ہوتا ہی اور جبکہ لا = نق تو ماس = ∞
 یا کہ اسکی وسیلہ حاصل ہوتا ہی ایک خط متفرع المقات جو کہ نقطہ شروع
 سے گزرتا ہی اور جبکہ لا ق سے زیادہ ہوتا ہی تو ماس کم ہوتا جاتا ہی اور علامت اسکی
 منفی اسطرح کہ مثبت ہے اور جب لا = نق تو ک = ۰ اور جب لا = ق
 تو ک = ∞ اور درمیان لا = نق اور ق کے کہ منفی ہے اسطرح یہیں
 حاصل ہوگی ایک شاخ خط منحنی کی درمیان خطوط متفرع المقات کی جو کہ نقاط اور

۱۔ مکہ کیچو جاوین کی اس سید سے حاصل ہوئی اور ش ضین خط منحنی کی جیکہ اکی اس سے برکتی
 اور ش ضین خط منحنی کی بائیں طرف اس کی ویسی ہیں جیسکہ دائیں طرف د کی ہیں
 غالب ہی کہ اس خط منحنی کو ایک یونانی ریاضی دان نے جسکا نام ^{ہیپو}ہیپو کرسٹس تھا ایجاد
 کیا ہو یہ ریاضی دان سقراط کی زمانہ میں موجود تھا یہ شخص تثلیث زاویہ کی کیا جانتا
 بلکہ یہ شخص ایک زاویہ کو کسی مساوی حصوں میں تقسیم کرنا جانتا تھا اس سب سے اسنی
 اس خط منحنی کو ایجاد کیا اور یہ فی الحقیقت ہو سکتا ہی اگر خط منحنی درست ہی سے ایجاد
 مثلاً اگر تثلیث کرنی زاویہ ا ص د کی منظور ہو تو کہو کہ کو ا ڈ ٹرکس اور درم ق
 کو اور تثلیث کرو خط کم کی نقاط آن اور د پر اور کیچو او تارن س اور و ط
 کو اور ٹرکس کے تو اس مساوت سی ر = $\frac{1}{2}$ کی لا کی دریافت ہو گا کہ خط ط ص ر
 اور ص ط تثلیث زاویہ ا ص د کے کرتی ہیں اس خط منحنی کی وسیکے ڈیوٹھس
 سطح دایرہ کی معلوم کی ہی اس طرح پر فرض کرو کہ نقطہ ی کا معلوم ہو سکتا ہی تو ہم
 قیمت کر کے بوسیلا اس مساوت کی ص ی = $\frac{1}{2}$ دریافت ہو جاو گی تو اس
 ظاہر ہی کہ نسبت درمیان محیط اور قطر دایرہ کی معلوم ہو جاو گی - واضح ہو گا کہ
 ایک اور قسم کا کو ا ڈ ٹرکس ہے جسکو چراسن صاحب نے ایجاد کیا تھا اور یہ
 اس طرح ہی ہو سکتا ہی کیچو دو خط نقاط آن اور م میں سے متوازی ا و ص اور ج
 کی تو کو کس اکی نقطہ تقاطع کا خط منحنی مذکور ہو گا اور اس کی مساوت یہ ہو گی
 و = ی جم (کے - ر) = ی جیس ر = ی جس کے لا -

خط و منحنی کی بیان میں

(۳۵۴) اگر ایک دائرہ ی ف کے مرکز کا لڑکی ایک سطح مغروض میں خط مغروض
 ب ص د پر تو وہ نقطہ محیط کا جو کہ ابتدائی حرکت میں نقطہ ب پر تھا گردش
 دائرہ سی ایک خط منحنی ب ف د کا بنا دیکھا جسکو خط وضعی کہتے ہیں یہ خط
 منحنی ایک کیل گازی کے پیچ کی جگہ گازی کسی مرکز پر حرکت کرتی ہے جو امین
 بناتی ہے اس یو پہلی دائرہ ی ف کے مرکز کو جو کہ اس خط منحنی کو بناتا ہے یہ کہتے ہیں
 خط د ب کو چہرے دائرہ ایک گردش میں گذرتا ہے قاعدہ خط وضعی کا کہتے
 ہیں اگر اسی ص د وہ مقام بنائی والی دائرہ کا ہو جو کہ بیچ میں لڑکی رستہ
 کی ہے تو لڑکی اس اور اس کو محور خط منحنی کا کہتے ہیں اور بنائی اس خط منحنی
 یہ معلوم ہوتا ہے کہ خط ب د مساوی محیط دائرہ کی ہے اور ب ص مساوی نصف
 محیط دائرہ کی ہے اور اگر ی ف کہ مقام اس دائرہ کا فرض کیا جاد کہ نقطہ
 ف دہ نقطہ جسی خط منحنی بناتی ہے اور چونکہ ہر ایک نقطہ قوس ف کے کہ ب ف
 پر منطبق ہوا ہے تو خط ب ف = قوس ف کے اور کہ ص = قوس ی ف ہے

وقت کے۔



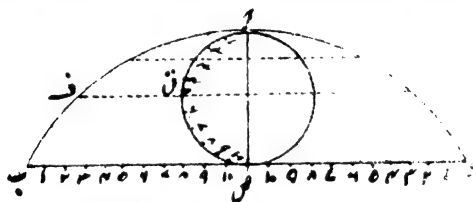
کہ چونکہ ق م متوازی قاعدہ ب د کے اور فرض کر دے کہ نقطہ شروع محور
 متقاطع علی الفوائیم کا ہے اور اس محور کا ہی بعد و مرکز دائرہ اسی ص کا ہے
 اور فرض کر دے کہ ل = لا اور کو = ط اور م ف = د اور زاویہ اوق = ب

ثواب ظاہری کہ بسبب متابعت مقام دو دایروں کی فن = ق م اور
 ن = م م = م ف = ق ف + م ق = م م + ق م = کھس +
 ق م = قوس اتق + ق م یعنی د = ط ر + ط جس ر = ط (ر + حصر ر) (۱)
 اور لا = ط - ط م ر = ط جیب معکوس ر = ط جع ر (۲) ثواب ظاہری
 کہ وہ مساوات جبین صرف لا اور د پایا جاوے جو سیدہ دور کرنے رسد اول
 (۱) اور (۲) میں سی حاصل ہوگی م ر = ط - ط لا = ط جس ر = ط م

$$\sqrt{ط^2 - ط لا} \quad \text{اور} \quad د = ط ر + ط جس ر = ط م^2 + (ط - ط لا) + ط لا - ط لا$$
 لیکن ہم مساوات خط منحنی کی جبین لا اور د پایا جاوے صرف جو سیدہ (۱) کے
 دریافت کر سکتے ہیں یعنی اس مساوات سی م ف = قوس اتق + ق م کیونکہ
 قوس اتق = دوس قوس دایرہ کی جس کا نصف قطر اور جیب معکوس لا ہی
 = ط { قوس دایرہ کے جس کا نصف قطر ایک اور جیب معکوس ط } =

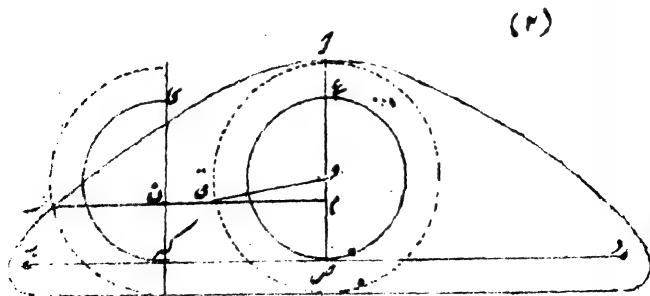
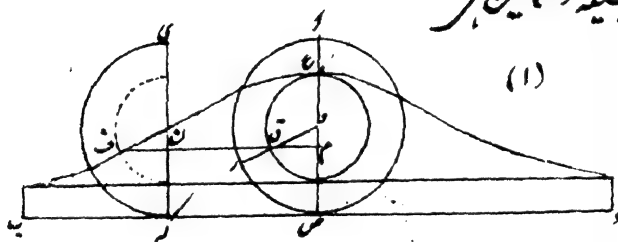
$$ط جع ط لا = د = ط جع ط لا + ط م^2 - ط لا - ط لا$$
 اگر نقطہ شروع ب
 پر ہو اور ب ر = لا اور ر ف = د تو مساواتیں یہ ہو گئی لا = ط جس ر
 اور د = ط - ط جس ر واضح ہو کہ ہم اس جائز اس خط منحنی کی نہیں کر سکتے
 کیونکہ صرف کچھ منحنی خط منحنی سے صورت اس کی دریافت ہو جاوے گی اگرچہ بعض منحنی
 کہتی ہیں کہ پہلی سیدہ کو اس کا خیال نہیں آیا تھا لیکن خط وضعی کا پہلی اسی فی
 امتحان کیا چونکہ ثابت کرنا اس کا تمام بڑی ریاضی دان ستر دین صدی
 جاہلی تھی اس واسطے یہ خط منحنی بہت مشہور ہوا تمام مشہور ریاضی دان اس

خط منحنی میں سے خواص ایندہ بہت مشہور ہیں اول تمام سطح اس خط منحنی کا
 مساوی گنتی سطح اس دایرہ کی ہے جس کے گردش سے یہ خط منحنی پیدا ہوا ہے
 دوم قوس آن مساوی دو چند و ترقق کی ہے۔ سیوم حماس جو کہ کہنیا
 جادہ نقطہ سے متوازی و ترقق کی ہوتا ہے چہارم اور اگر شکل فی الحقیقت
 تو ایک جسم کسی ایک نقطہ خط منحنی سے گر لگا طرف سے پہنچ کے نقطہ آگے
 ایک ہی وقت میں اور اگر ایک جسم ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ کی طرف گری جائے
 کہ ایک عمود میں ہوں تو دستہ اس کی جلدی گر لگتا قوس خط وضعی کی ہوگی یعنی جسم کو
 اس قوس پر جلدی سے مسافت طے کر لگتا بہ نسبت اس خط مستقیم کی جو کہ درمیان
 ان دو نقاط کی ہے واضح ہو کہ اس صورت میں واسطے گزرنی اجسام کی قوس مجوف خط
 وضعی کے اوپر کو کہنی جائے تاکہ جسم اس پر سے جلدی سے گری۔
 (۳۵۸) معلوم ہے کہ قاعہ خط وضعی کا دریافت کر دھ خط منحنی کو۔



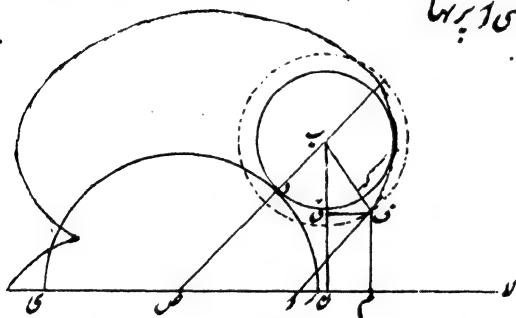
جس کو راقعہ بَد بانیس مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور مان لو کہ یہ نقطہ
 د اور ب سے طرف ص کے گئی جاتے ہیں نقطہ ص سے کچھ عمود ص و س کا
 ساتھ حصوں مذکور کے اور حصہ پر بناؤ دایرہ راقعہ ص کا اور اس طے حصی تقسیم
 کر دو حصہ کو اسی قدر حصوں میں بوسیله پائش یا بوسیله خط ب ص کے شکل

بالا میں نقطہ ق پانچویں حصہ کی انجام پر فرض کیا گیا ہے اور چونکہ قوس ق ص
 مساوی ص ہ کی ہے اور اب اگر ق ق متوازی قاعدہ کی اسطر جبر کہی جاوے
 کہ وہ مساوی باقی قاعدہ یعنی ب ہ یا ان کے ہونو ظاہری کرت ایک نقطہ خط
 منحنی مطلوب کا ہوگا اس سطر حسی اور نقطہ در فیت ہو سکتے ہیں جنکی ملانی خط
 وضعی مطلوب پیدا ہوگا نسبت محیط اور قطر کی اس صورت میں وہ ہے جو کہ ۲۲ و ۷
 (۳۵۹) اب فرض کرو کہ نقطہ ق بجای ہوگی کے محیط دائرہ پر اندر یا باہر
 محیط دائرہ کی ہے صورت خط وضعی کو خط وضعی کشادہ کہتی ہیں جیسکے
 شکل (۱) میں ہے اور صورت اخیر میں خط وضعی کو خط وضعی مختصر کہتی ہیں
 جیسکے (۲) میں ہے



بقاعدہ خط وضعی کا ہی جیسے دائرہ اگر ص بنائی والا اس خط منحنی کا مرکز ہو
 اور وہ مرکز اس دائرہ کا ہی اور ف وہ نقطہ جس سے خط وضعی متناہی جبکہ دائرہ
 کہ پر ہی اور کہینچو خط ف ن ق م متوازی قاعدہ کے فرض کرو کہ آ نقطہ شروع
 محور د ن متقاطع علی القوائیم کا ہی اور ا م = لا اور م ف = د اور ا د = ط
 اور ع و = م ط اور زاویہ اور = ر تو اب ف ا ہر ہی م ف = م ن + ف ن
 = م ن + ق م = کہ ص + ق م = قوس ار + ق م اور ا م = او + و م
 د = ط + م ط جس ر اور لا = ط جمع رہے سادہ اتین کشادہ یا مختصر خط
 وضعی یا خود خط وضعی کی ہوگی جبکہ م کم یا زیادہ یا مساوی ایک کی ہوگا اگر
 راس ع نقطہ شروع شکل (۱) اور (۲) کا فرض کیا جاوے تو ع د = ط
 اور ا د = م ط اور م ف = کہ ص + ق م = قوس ار + ق م
 د = م ط + ط جس ر = م جمع ا ط + م ط اور لا وہ خط منحنی جسکی
 سادہ اتین یہ ہیں د = ط اور لا = ط جمع رہے شک خط وضعی کہلاتا ہے۔
 (۳۶۰) بحث خط وضعی کی زیادہ ہو سکتی ہے جبکہ قاعدہ خط وضعی کا خط منحنی
 فرض کیا جاوے مثلاً فرض کرو قاعدہ ایک دائرہ ہو اور فرض کرو کہ ایک اور دائرہ
 اس دائرہ کی محیط پر لگتا ہے تو ایک نقطہ جو کہ اندر یا باہر محیط لگنے والی دائرہ
 کی ہی بناوگا ایک خط منحنی جو کہ ایسی ہی گواہ کہتے ہیں اور اگر یہ نقطہ محیط دائرہ پر
 ہو تو اس خط منحنی کو جو کہ اس نقطہ کی گردش ہی پیدا ہوگا نصف خط وضعی
 کہتے ہیں اگر دائرہ بختہ محو طرف دائرہ پر لگے تو وہ خط جو پیدا ہوگا ایک نقطہ

۱۹
 اس جو باہر یا اندر دایرہ متحرک کے کسی اور تری کو اوڑھ کھلتا ہے اور جبکہ نقطہ مذکور محیط دایرہ
 مذکور پر نہ تو وہ خط جو اس نقطہ میں پیدا ہو گا کسی بیسائی کو اوڑھ کھلتا ہے۔ دریافت
 کرو سادہ نصف تری کو اوڑھ کے فرض کرو کہ ص مرکز فاعده کی دکاہی اور یہ
 مرکز دایرہ متحرک دیکھ کا جبکہ وہ ایک خاص مقام پر ہو اور ص و م ایک ایسے
 خط مستقیم ہی جو کہ مرکز دو دایرہ زمین کے گزرتا ہے جبکہ ہمہ دونو دایرے اس مقام
 پر پہنچ کر اعلیٰ حرکت شروع ہوئی ہے یعنی جبکہ نقطہ بنانی والے اس خط منحنی کا
 قریب ص کے یعنی آبرہتا



فرض کرو کہ ص ۱ محور لا کا ہی اور ص م = لا اور م ف = ی اور ص د = ط
اور ب د = ص اور ب ف = م ص اور زاویہ ا ص ب = ر کہیں جو خط ب نہ
کا متوازی م ف کے اور ف ق متوازی می م کے اور چونکہ ہر ایک نقطہ د ف کا
قاعدہ آد پر منطبق ہوا ہے اس لیے د ف = ط ر اور زاویہ د ب ف = ط
اور زاویہ کہ ب ق = زاویہ کہ ب د = زاویہ ق ب د = ط - (لے - ر)
= $\frac{\text{ط} + \text{ص}}{\text{ص}} - \frac{\text{ر}}{\text{کے}}$ اور اپ ظاہر ہے کہ ص م = ص ن + ن م =
ص ب جم ب ص ن + ب ف جن ف ب ق = (ط + ص) جم ر +

$$\begin{aligned} \text{م ص جس (ط + ص ر - کپے) اور م ف = ب ن - ق ب =} \\ (\text{ط + ص}) \text{ جس ر - م ص جم } (\text{ط + ص} - \text{کپے}) \end{aligned}$$

$$(۱) \quad \begin{cases} \text{یا لا} = (\text{ط + ص}) \text{ جم ر - م ص جم } \frac{\text{ط + ص ر}}{\text{ص}} \\ \text{اور س} = (\text{ط + ص}) \text{ جس ر - م ص جس } \frac{\text{ط + ص ر}}{\text{ص}} \end{cases}$$

ساداتین اپنی بنائیک کو اڈ کے دریافت ہو سکتی ہیں جبکہ ص بچے م ص کے (۱) میں

$$(۲) \quad \begin{cases} \text{لکھا جاوے: لا} = (\text{ط + ص}) \text{ جم ر - ص جم } \frac{\text{ط + ص ر}}{\text{ص}} \\ \text{اور س} = (\text{ط + ص}) \text{ جس ر - ص جس } \frac{\text{ط + ص ر}}{\text{ص}} \end{cases}$$

ساداتین ہی پوتری کو اڈ کی دریافت ہو سکتی ہیں اس لیے جس طرح (۱) کی دریافت ہوئی ہیں یا آسانی سے دریافت ہوگی جبکہ ص بچے م ص کے ساداتین

$$(۳) \quad \begin{cases} (۱) \text{ میں لکھا جاوے: لا} = (\text{ط - ص}) \text{ جم ر + م ص جم } \frac{\text{ط - ص ر}}{\text{ص}} \\ \text{اور س} = (\text{ط - ص}) \text{ جس ر - م ص جس } \frac{\text{ط - ص ر}}{\text{ص}} \end{cases}$$

اور ساداتین ہی بنائیک کو اڈ کی دریافت ہو سکتی ہیں جبکہ ص بچے م ص اور م ص کے (۱) میں لکھا جاوے

$$(۴) \quad \begin{cases} \text{لا} = (\text{ط - ص}) \text{ جم ر + م ص جم } \frac{\text{ط - ص ر}}{\text{ص}} \\ \text{اور س} = (\text{ط - ص}) \text{ جس ر - م ص جس } \frac{\text{ط - ص ر}}{\text{ص}} \end{cases} \dots$$

ظاہر ہے کہ تمام صورتیں گذشتہ (۱) میں داخل ہیں لیکن ہر ایک انہیں سے جو سیدہ انکی علیحدہ علیحدہ شکلوں کے حاصل ہو سکتی یا موافق خاصہ فرضوں کے معلوم ہو سکتی ہے (۳۶۱) درکار مقامات پر سکتی کا لفظ ہے اور اس عمل سے ایسی ساداتین

جبر حاصل ہوگی جو کہ محدود ہوگی اور یہ اس وقت ہو سکتا ہے جبکہ نسبت درمیان
 ط اور ص کی ایسی ہو جسے صحیح اعداد میں ہوتی ہے کیونکہ اس صورت میں
 جہر اور جہر $\frac{ط}{ص}$ اور جس رو غیرہ تعبیر ہو سکتی ہیں ایسی صورتوں
 مثلثی سے جہین اجزای حمہ اور جسہ پائی جاو سکتی اور ہ صنف مشترک
 ر اور ط ص کا ہے اور اب اجزای جہر اور جسہ اجزای لا اور د
 میں دریافت ہو سکتی ہیں اور چونکہ وہ مساوت جو کہ موافق اس فرض کی اجزا
 لا اور د میں حاصل ہوگی محدود ہی اور خط منحنی لا نہایت سلسلہ گردشوں
 کا بناتاہے لیکن دائرہ متحرک میں بعد جب گردشوں کے وہ نقطہ جس سے خط منحنی
 بنتا ہے اسی مقام پر دریافت ہوگا جس مقام پر وہ ابتدائی گردش میں تھا
 اسی واسطی یہ نقطہ دہی خط منحنی پر بناو گیا مثلاً فرض کرو کہ ط = ص تو مساوت
 نصف خط وضعی کی یہ ہوگی لا = ط (۲ جم - جم ۱) اور د = ط (۲ جم - جم ۱)
 لا = ط (۲ جم - جم ۱) + ۱ (۲ جم - جم ۱) اور د = ط (۲ جم - جم ۱) + ۱ (۲ جم - جم ۱)
 پہلی مساوت کی قیمت جم کے دریافت ہوگی اور دوسری مساوت سے قیمت جم کے
 کے معلوم ہوگی اور جبکہ جمع کر سکیں ہم قیمتوں (جم ۱) اور (جم ۲) کو تو بعد
 اختصار کا یہ حاصل ہوگا (د + لا - ط) = ط (۲ جم - جم ۱) + ۱ (۲ جم - جم ۱) یا
 (لا + د - ط) = ط (۲ جم - جم ۱) + ۱ (۲ جم - جم ۱) = ۰ چونکہ اس خط کی شکل
 مثل صورت دل کی ہے اسی واسطی اسکو کارڈی آوا کہتی ہیں فرض کرو کہ لا نقطہ
 شروع یعنی بجای لا کے لکھو (لا + ط) مساوت گذشتہ میں تو اب جہوت لین

ہم اس مساوت کی محور کو نقطہ قطبی محور دہنی تو اس صورت میں مساوت کا ردی آؤاؤ

کی یہ ہو جاوے گی $\text{نق} = \text{ط} (۱ - \text{جم} \text{ھ}) -$

(۳۶۲) اگر جس $= \text{ط} / ۲$ تو مساوت (۴) $\text{ط} / ۲$ ہواؤ کی یہ ہو جاوے گی

$\text{لا} = \text{ط} \text{م} \text{اور} \text{۔} = ۰$ اور اس صورت میں بائیں ہواؤ قطر دایرہ اسی

کا ہو جاوے گا اور اسی صورت میں بائیں ہواؤ کی یہ ہو گی

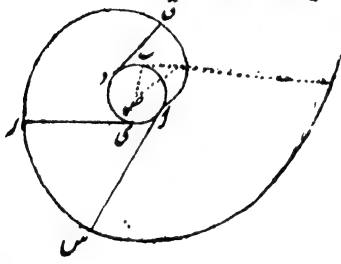
$\text{لا} = \text{ط} / ۲ (۱ + \text{م})$ جم $\text{اور} \text{۔} = \text{ط} / ۲ (۱ - \text{م})$ جس اور جبکہ دور کریم

ر کو اس مساوت میں سے تو حاصل ہو گی ہیں مساوت بیضوی کی جس کے محور یہ ہو گی

(۱ + م) اور $\text{ط} (۱ - \text{م})$

(۳۶۳) اگر ایک دورا جو کہ دایرہ پر لپٹا ہوا ہے کھولا جائے تو انجام اس دورہ

کا بناوٹ ایک خط منحنی جس کو انوولیوٹ دایرہ کا کہتے ہیں -



منظور کر دو کہ ایک دورا

گرد دایرہ اب دکی لپٹا ہوا

ہی اور اب اگر کھولا جائے

یہ دور نقطہ آسے تو وہ

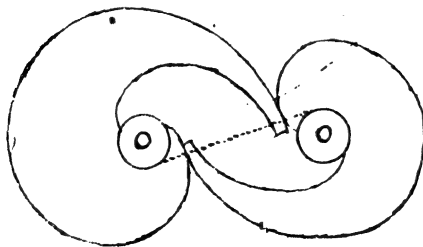
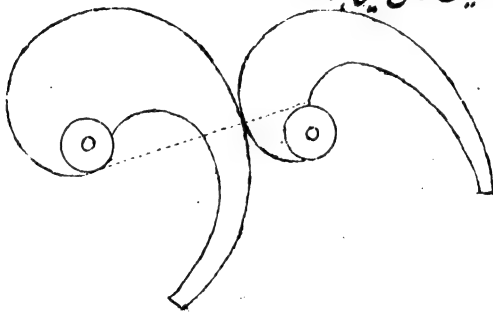
انجام جو کہ ماتہ میں ہی انوولیوٹ $\text{انق} \text{س}$ دایرہ کا بناوٹ کا خطوط

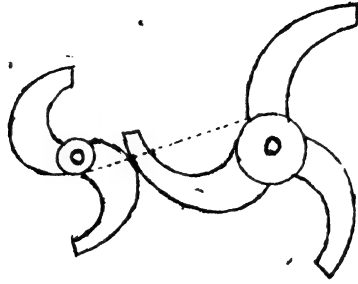
اور $\text{دق} \text{اور} \text{ر}$ اور اس جو کہ خاص مقام دوری کی ہیں تماس دایرہ کی ہیں اور

ہر ایک ان میں سے مساوی اس قوس کے ہے جو کہ درمیان آ اور اس انجام دورہ کے

واقع ہے جو کہ دایرہ پر ہی یہ خط منحنی لانا ہوتا ہے کہ تباہی اور شخین اس کی

ایک دوسری سہی اوس فاصلہ پر واقع ہیں جو مساوی محیط دایرہ کی ہر - دریافت کرد
 مساوت انود کیوت کی فرض کرو کہ ص ۱ = ط اور ص ۲ = نق اور زاویہ
 ۱ ص ۲ = ر تو اب ظاہر ہے کہ بوسیدہ مثلث ب ص ۲ کہ ہمیں یہ حاصل ہوتا ہے
 ب ص = ف ص جم ف ص ب باز اویہ ف ص ب = جم ا ط ۱ : ب و = ب
 = ط (جم ا ط ۱ + ر) یا $\frac{1}{2}(ط - ۲)$ = ط (جم ا ط ۱ + ر) :
 ر = $\frac{1}{2}(ط - ۲)$ - جم ا ط ۱ انود کیوت دایرہ کا بہت فائدہ سہی دانت اسیوں
 استعمال میں لایا گیا ہے کیونکہ طاقت بہت کم ضایع ہوگی ایک دانت سہی دوسری
 دانت تک گزرنے میں جبکہ وہ اس صورت کی ہوگی اور جب پیسہ مختلف صورتوں میں ہو گئے
 تو یہ بہ فایہ حاصل نہیں ہوگا





اشکال (۲) اور (۳) میں دو دیہیہ ہیں ہر ایک انہیں سے دو دانت رکھتا ہے اور ایک پیہ کو حرکت دینی سہی دوسرا پیہ جسکی دانت پہلی سے ملی ہوئی ہیں حرکت

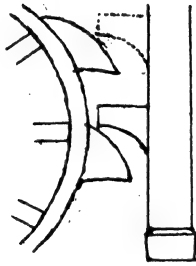
کرے گا خط نقشہ ارجو کہ اشکال

مرفومہ بالا میں ہیں ماس انولٹیوٹ

کی موافق خاصیت اس خط منحنی کے

ہوگی اور یہی خط ہمیشہ ماس خط

منحنی کا ہوگا اور ایک قوت ہر ایک



حصہ اس خط میں ہوگی جسمین پیہ گردش کرتی ہیں شکل (۳) ایک اور مثال

اس قسم کی اور جیکہ مستعد اور چھوٹی چھوٹی دانت پیہ کے بنائی جادیں تو دانت

دانت دار سہی ہمیشہ ملی ہوئی رہنکی اور اس پر کل کے متحرک کر نہیں بہت آسانی

ہوگی اگر دانت یا ہتورچی کے اوٹھائی میں انولٹیوٹ دائرہ کا مستعمل کیا جاوے

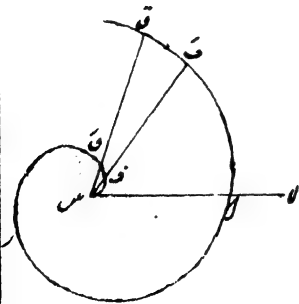
تو طہا ہر سہی کہ پیہ واسطی دانت پیہ کے بہت مفید ہوگی کیونکہ قوت اس صورت

میں دانت پر سمت عمود ہیں گرتے ہے -

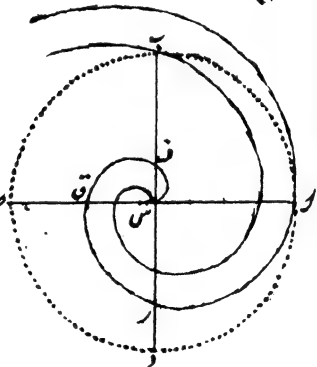
(خطوط پچیدہ کے بیان میں)

(۳۶۴) واضح ہو کہ چند خطوط غیر حریہ جنکا اب تک بیان نہیں ہوا اس سبب کوئی صورت پچیدہ کی خطوط مخفی پچیدہ کہلاتی ہیں انکو مہندسان مستقیمین نے ایجاد کیا تھا اور انہوں نے نقوش اس صورت کی مکانات پر کردی تھے ان خطوط مخفی میں سے بہت آسان اور فایہ مند وہ خط مخفی پچیدہ ہے جسکو ارسطو نے ایجاد کیا تھا اور یہ خط اس طرح بنتا ہے فرض کرو کہ جب ایک خط مستقیم غیر محدود س ف گرد خط س لہ اور نقطہ س کے پیرامی اوس وقت میں ایک نقطہ ف خط س ف پر حرکت کرتا ہی تو ابظاہر ہے کہ یہ نقطہ خط مخفی س ف کا بنا دیکھا اور جبکہ خط س ف ایک گردش تمام کر گیا تو نقطہ مقام آبر او گیا اور اسی طرح جبکہ خط س ف پرتا جا د گیا تو ایک سیدہ عین خط کا بن گیا

(۱)



(۲)

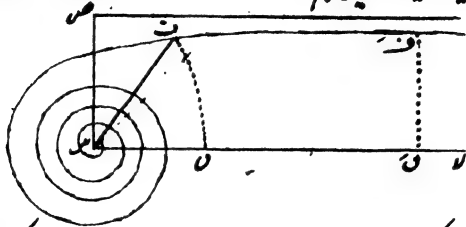


در اعلیٰ دریافت کرنے صورت اور خواص اس خط مخفی کے نہیں مساوت اس خط مخفی کی نسبت

ہندسہ

اوتار قطبی کی دریافت کرنے چاہی۔ فرض کرو کہ $SF =$ قی اور $S1 =$ ص
 اور $S1 = SF =$ ر اور چونکہ زیادتی قی اور ر کی ایک سی ہی تو
 $SF : S1 ::$ زاویہ $S1SF$: چار قایم کونے $::$ ر : ۲ کہ یہاں کہہ دو
 $S1 =$ پھر اس مساوت یہ معلوم ہوتا ہے جبکہ SF دو گرد شین کرتا ہے
 یعنی $R = ۲$ کہ تو قی $= ۲$ ص یا خط منحنی پہر حجر S کا فاصلہ $S1$ پر قطع کر لگا
 اسطرحی بعد $S2$ اور S اور S گرد شون کے وہ مقامی محور S لاسی فاصلہ
 $S2$ یا S یا S گنے S پر اور آرک میڈیز نے دریافت کیا کہ سطح S قی R
 مساوی ایک نلٹ سطح اُس دایرہ کی جگہ مرکز S اور نصف قطر S کی ہے۔
 (۳۶۵) خط عجیدہ آرک میڈیز حسب کا بعض اوقات مینار کے ایک خاص حصہ کے
 بنانی میں کام آتا ہے اور اس صورت میں طریقہ آئندہ درجے بنانی اس خط کی بوسیلہ
 نقاط کی بہت اچھا سی فرض کرو کہ دایرہ AB ص نصف S پر شکل (۲) میں
 کھچا ہوا ہے اور کچھ قطربہ عمود S پر اور تقسیم کرو نصف قطر S کو چار
 مساوی حصوں میں اور S ب میں سے قطع کرو S $= \frac{1}{4} S$ اور S ص میں
 سے S قی $= \frac{1}{4} S$ اور S د میں سے S ر $= \frac{1}{4} S$ اور S ب او
 خط منحنی سے ظاہر ہوگا کہ یہ نقاط خط منحنی کی ہنگی اور اگر اسطرحی نصف قطر S اور
 کو اور حصص میں اور ہر ایک زاویہ کو جو ربع دایرہ میں واقع ہے تقسیم کریں تو ہر
 اور یہی نقاط خط منحنی کے دریافت ہو جائیں گے اور درجے تمام کرنی اور ہری ہونی لڑی
 حصہ مگر مینار کے ایک اور خط عجیدہ شروع ہوتا ہے خط S ب سے۔

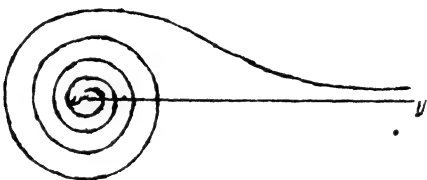
خط پچیدہ اگر کیڈیز کا ایک خط اور خط پچیدہ میں سے ای جو اس سادہ
عام خط پچیدہ کی کسی سیدہ ہوتے ہیں نئی = بارن ہر قسم کی خط پچیدہ کہ ہم وہ
صورتیں بیان کر سکیں جہاں $n = 1$ اور $n = \frac{1}{p}$ کی ہو جاتا ہے۔



فرض کر دو کہ $n = 1$ نئی = طر' اور مان لو کہ اس قطب ہی اور
اس لادہ محور سے جس سے r کا شمار جاتا ہے اور $s = f$ = n اب ظاہر ہے کہ
جب $r = 0$ تو $n = \infty$ اور جبکہ r زیادہ ہوتا ہے تو n پہلے بہت جلد کم ہوتا
جاتا ہے مگر بعد اسکی قریب یکساں رفتار سے کم ہوتا ہے اور جبکہ r لا نہایت زیادہ
ہوتا ہے کہ r تو اوسط طرح n لا نہایت کم ہوتا جا دیگا اور قریب صفر کے آتا جا
مگر کبھی صفر نہیں ہوگا یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ لا نہایت بچ کر نقطہ s کی ہو گئی
کہیچو f قوس دایرہ کی s کو مرکز اور s کو قطر کر دانی نواب ظاہر ہے کہ
 $f = n = r = ط$ اور چونکہ یہ قیمت $ط$ وسطی ہر ایک مقام f کی ایک ہی ہے
تو $f = ط = f$ = خط s کی جبکہ f لا نہایت فاصلہ پر ہوگا اور
اس صورت میں خط منحنی نزدیک اس خط متفرع الملاقات کی ہو چکا جو نقطہ s سے
متوازی s لا کے کھینچا جاوے گا اس خط منحنی کو خط پچیدہ تمککائی کہتے ہیں سوائے
صورت اسکی سادہ کی کہیچو نقطہ $ط$ اور غیر منقطع نسبت متکائی ایک دوسرے سے

رکتی ہیں اور بعض اوقات بعید البینوی کا خط پیچیدہ ہوتی ہیں کیونکہ مساوی
اسکی مشابہ مساویات اور مساوی البینوی کے ہر جگہ مساویات نسبت خط
متغیر المقات کی حاصل ہوتی ہے اور جو یہ ہے (لاء = کر) (۳۶۷)

(۳۶۷) فرض کرو کہ $n = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$: $n = ط$ یا $n = ط$
یہ خط مخفی مثل شکل طینور کے ہے اور صورت اسکی شکل مرقوم ذیل سی طابری کی خط
مخفی خط متغیر المقات سے لے کر شروع ہوگی لہذا یہت پیچ کر نقطہ س کی کہانیاں



(۳۶۸) اگر اس مساویات فی $n = ط$ میں سے ہم ایک مقررہ ص تغیر کریں تو
ہو کہ یہ مساویات حاصل ہوگی (ی - ص) $n = ط$ یہ خط شروع کرتا ہے اپنی دورہ
مگر مثل خط پیچیدہ مشکافی کی مگر جبکہ زیادہ ہوتا ہے تو (ن - ص) قریب صفر کی ہوتا
جاتا ہے یعنی قیمت n کے قریب ص کی ہوتی جاتی ہے یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ خط پیچیدہ
لہذا یہت گردشون کے قریب اس دایرہ کی آتا ہے جو خط متغیر المقات ہوا اور جبکہ نصف
قطر اس اور مرکز ہے۔

(۳۶۹) دریافت کرد اس خط پیچیدہ کو جبکی مساویات یہ ہے $n = ط$ یا $n = ط$
ص = یہ خط مخفی لہذا یہت گردشون گرد خط کے کرتا ہے اور یہاں سے شکل بدلیا ہے

اوس دایرہ کے جو خط مستقیم الملاقات ہی اور جبکہ نصف قطر ہے -
 (۳۷۰) وہ خط پیچیدہ جسکی مساوت یہہ ہی (ل - ط) = ص ر شروع کرتا ہے
 اپنی دورہ کو ایک نقطہ محیط دایرہ سے جبکہ نصف قطر ہے اور پہلی ہی باہر نکلتا
 بعد لا نہایت گردشون کے گرد نقطہ س کے یہ خط منحنی پیدا ہوگا بوسیدہ لینی محور
 قریب البیضوی کے گرد محیط ایک دایرہ کے اسطر جہ کہ خط منحنی قریب البیضوی کا پیچیدہ
 بنا ہے - غ (۳۷۱) وہ خط منحنی جسکی مساوت یہہ ہی = ط خط پیچیدہ
 کو کا رشی کہلاتا ہے کیونکہ لو کا رشم نصف قطر محرک کا تناسب زاویہ رکی ہی
 بعد از انانی تمام قیمتوں رکی - سی لا نہایت تک معلوم ہوتا ہے یہیں کہ خط
 منحنی لا نہایت گردشون گرد قطب س کے کرتا ہے اور اس خط منحنی کو خط پیچیدہ
 مساویہ الزاویہ ہی کہتے ہیں کیونکہ بوسیدہ بعض بڑی اصول نہہ - باجیر کی درخت
 ہوتا ہے کہ یہ خط منحنی نصف قطر محرک کو ایک زاویہ مقررہ پر قطع کرتا ہے یعنی جو زاویہ
 انکی تقاطع سے حاصل ہوگا وہ مساوی مقدار مقررہ کی ہے - دس کارٹیز صاحب
 (جسکو پہلی خیال اس خط منحنی کا آیا تھا) معلوم کیا کہ تمام طول اس خط کا کسی ایک نقطہ
 ق س قطب تک تناسب اوس قطر محرک کی ہی جو ق جہر -

(۳۷۲) یہہ اگر واقع ہوتا ہے کہ مساوت جبرہ ایک خط منحنی کی زیادہ شکل ہوتی ہے
 نسبت اوسکی قطبی مساوت کی جسکیکہ مساوت کن کو اوڈی جکبا بیان فقرہ ۳۲۷
 میں کیا گیا ہے حال اس بات کا بخوبی واضح ہے اسیسو اسطی ان صورتوں میں یہہ
 معلوم ہوتا ہے کہ مساوت جبرہ نہ مساوت قطبی سے بل جہاں تاکہ آسانی خط منحنی

ہوتا ہی کہ لو کہ اس کا بیضی اوف باقی مثل شکل گذشتہ کی ہے۔ اگر ایک نقطہ
 مرف پر جو نصف قطر متحرک قریب البیضوی کا ہی اسطرح فرض کیا جاوے کہ
 اس کا نقطہ آتشی سے مساوی اوس عمود کی پوجو کہ یہی چاہے نقطہ آتشی سے
 پرتو کو کس نقطہ مرکوز کا وہ خط منحنی ہوگا جسکی مساوت یہہری = ط سٹ ہے



حصہ دوم
مشتل او پر ادس فرع اس علم کے ہی حسین تین بعد کی مقدار ونسی بحث ہی
باب اول
آغاز

(۳۷۴) پہلی حصہ میں اس کتاب کی نقاط اور خطوط کو ایک سطح میں فرض کیا ہے اور سادہ اوکلی بلحاظ دو تیزوں کے دریافت کی گئی ہے اور یہ اوتار ایک سطح میں خیال کی گئی ہیں اب ظاہر ہے کہ ہم ایک ایسا خط نمونی فرض کر سکتے ہیں جو ایک سطح میں ہو اور ایسی سطحی ایک سطح کو فرض کر سکتی ہیں مثلاً سطح کرہ کی ایک ایسی سطح ہے کہ تمام نقطے اس کی ایک سطح میں نہیں ہیں ایسی سطحی وہ طریقہ جو کہ پہلے حصہ میں واسطے دریافت کرنے شکلوں کے استعمال میں لایا گیا ہے اس کا مشعل نہیں ہو سکتا ہی تو اب واسطے دریافت کرنے ایسی شکل کا جو تین بعد سے تعلق رکھتی ہیں ایک عام طریقہ لکھا جا دے گا۔

(۳۷۵) واضح ہو کہ اول ہم مقام ایک نقطہ کا بلحاظ تین بعد کی دریافت کریں فرض کرو کہ o اور o' اور o'' تین ایسی سطح ہیں جو کہ عمود ایک

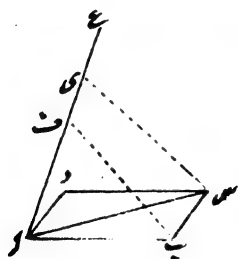
نشان نقطہ کے بوسیدہ کیجی ان عمودوں کے سطح لاء اور لاء و پرہوی
ہیں۔ واضح ہو کہ طریقہ نشا نوٹھا واسطی درخت کرنے سطوح کے بہت فائدہ مند
اس واسطی ہم سبھی جہاں ایسی شکلوں کو لکھیں گے جو کہ اس کتاب میں مفید ہو سکی اور
جس کا جاننا واسطی سمجھنی بیان سطوح کے ضرور ہو۔

بیان نشانوں کا

(۳۷۶) اگر چند نقاط ایک خط مستقیم میں فرض کی جائیں تو نشان انکی یہی کسی
ایک سطح پر سطوح متقاطع علی القوایم میں سے ایک خط مستقیم میں ہو سکی یعنی
اگر ان نقاط مفروضہ سے عمود ایک سطح پر ڈالے جائیں تو وہ نشان جو کہ
ان عمودوں کے ڈالنے سے سطح پر پیدا ہو سکی وہ ایک خط مستقیم میں ہو سکی کیونکہ
یہ تمام نقاط اس سطح میں ہو سکی جو کہ پہچ جاوے خط مفروضہ سے عمود ایک
سطح متقاطع علی القوایم پر اور چونکہ دو سطحوں کے تقاطع سے ایک خط مستقیم
پیدا ہوتا ہے تو اب ثابت ہوا کہ نشان نقاط مفروضہ کے ایک خط مستقیم میں
ہیں۔ واضح ہو کہ اس سطح کو حسین تمام وہ عمود ہیں جو کہ کہیں گے ہیں
نقاط مفروضہ سے سطح نشانی کہتے ہیں اور وہ خط جو کہ تقاطع کرنے اس
سطح اور سطح متقاطع علی القوایم کے سی پیدا ہوتا ہے خط نشانی کہلاتا ہے۔

(۳۷۷) دریافت کر دو طول خط نشانی ایک خط مستقیم کا جبکہ وہ ایک سطح
پر پہچا جاوے فرض کر دو کہ وہ خط ہی جس کا خط نشانی سطح ہاں معلوم
کرنا منظور ہے کہیو خط اب جب تک کہ وہ ملی اس سطح سے نقطہ ہاں کہیں

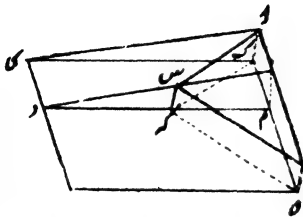
کہ جو دو سطح ایک اور فن عمود خط میں دہر تو ظاہری کہ اگر اور بے ان طوں
 میں ہوگی اب نقطہ آسے کیچو ای عمود سطح فن پر ایسا ہے یہ خط متوازی
 ہے کی ہوگا چونکہ مثلث بے کی میں زاویہ کی قائمہ ہے تو $\angle ب = 90^\circ$
 اور $\angle ب$ کی اور زاویہ بے کی مساوی اور اس زاویہ کی ہر جو کہ خط $\angle ب$ خط
 میں دسی بناتا ہے اور فرض کرو کہ یہ $\angle ب = 90^\circ$ اور $\angle ب = 90^\circ$ اور
 $\angle ب = 90^\circ$ اور واضح ہو کہ خط $\angle ب$ میں اور خط کا ہی جو کہ مساوی اور متوازی خط
 اور بے کی آسے خط میں دہر ہوگا اور خط $\angle ب$ کا وہ خط جو سواری میں دہر ہوگا
 (۳۷۹) خط نشان کی ایک متوازی الاضلاع کے قطر کا اور ایک خط کی مساوی
 ہی مجبورہ خطوط نشان کی دو ضلعوں اور متوازی الاضلاع کی خطانہ گور پر
 فرض کرو $\angle ب$ میں دیکھ متوازی الاضلاع اور $\angle ب$ وہ خط ہی جسے خط
 نشان کی کہیں منظور ہے اور جو متوازی الاضلاع میں نقطہ آسے پر ملتا ہے



نقاط میں اور بے کی
 کہیں چوسے اور بے کی عمود
 خط نوع پر تو ظاہری کہ
 ای خط نشان میں اس کا

خط ای برہی یا ای = اس میں اس دے اور ان خط نشان میں اب
 دے برہی یا ای = اب میں بے دے اور ای خط نشان میں اب
 یا ای کا ای برہی یعنی ای = ب میں دے اور ای = ای

+ فی بیانی ثابت ہو کہ خط ثانی اس = خط ثانی اب + خط ثانی
 س ب کے - ث (۳۸۰) دریافت کرو سطح ثانی کسی خاص سطح کے ایک سطح
 مفروضی دکھ پر فرض کرو کہ اب س ایک مثلث جو کہ سطحی دکھ ہ سی زاویہ
 رکھتا ہے کہ چوڑی اور س د عمود خطی د پر جو کہ فصل مشترک درمیان سطح



مثلث اور سطح مفروضی کی سر
 اب غائب ہے کہ اب قاعدہ مثلث
 اب س کا سادی کے کل سر
 جو کہ قاعدہ اسکی سطح ثانی

کے کہ کا ہی لیکن ارتفاع س ق اور کہ تم ان دو نون کے غیر سادی میں

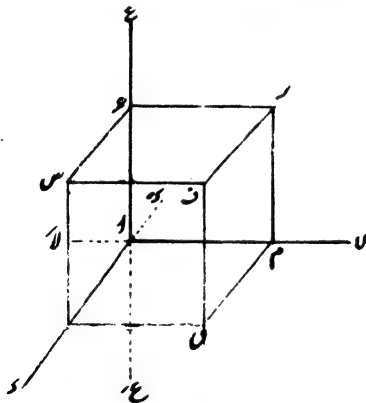
۱: سطح اب س : کہ کہ ۲: س ق : کہ م ۳: ق ف : کہ د ۴: ا : کہ ہ
 ۵: سطح ک کہ = اب س م : کہ یہ دعو صورت مثلث میں ثابت ہوا تو وہ
 سطح متوازی الاضلاع میں بھی ثابت ہو گا اور اسے یک سو سطح میں بھی

باب دوم

بیان نقطہ اور خط مستقیم میں

(۳۸۱) ہمیں ابھی طریقہ دریافت کرنے مقام ایک نقطہ کا سطح میں بیان کیا ہی
 اور اس سے یہ ثابت ہوا کہ مقام ایک نقطہ کا اس وقت معلوم ہو گا جبکہ تین
 عمود جو کہ کہیں جاویں نقطہ مفروض سے تین سطحوں عمودی پر معلوم ہو گی اب
 اگر طول ان عمودوں کا یعنی طول اوتار نقطہ مفروض ق کا بعد بیانی کے

یہ ثابت ہو ازم = ط اور ان = ص اور او = س تو ہی ہر مقام
 نقطہ کا ان مساواتوں سے معلوم ہو جا دیکھا لا = ط اور د = ص اور
 ع = س اور چونکہ یہ مساواتیں کافی ہیں واسطے دریافت کرنے مقام ایک نقطہ
 کے اس واسطے ان مساواتیں نقطہ کی کہتے ہیں۔ واضح ہو کہ مقام اس
 نقطہ کا مساوات آئندہ کسی ہی دریافت ہو سکتا ہی جیسا کہ فقرہ (۲۵) میں چنانچہ
 صرف دو بعد کافی نظر رکھا گیا تھا دریافت ہوا ہی (لا - ط) + (ع - ص) +
 (ع - س) = ۰۔ وہ قیمتیں اس مساوات کی جن سے کہ شرط اس مساوات کی
 پوری ہو یہ ہیں لا = ط اور د = ص اور ع = س



(۳۸۲) علامات جبر یہ اوتار لا اور د اور ع کی اوسط سے دریافت ہو سکتی ہیں
 جیسا کہ حصہ اول اس کتاب میں دریافت ہوئی ہیں مثلاً کو ثبت ہوگا جبکہ یہ شمار
 کیا جاوے گا اور صغی ہوگا جبکہ وہ شمار کیا جاوے گا اور ع پر یعنی وہ ثبت ہوگا
 جبکہ اوپر صغی لا کی ہی اور صغی ہوگا جبکہ صغی او کی ہی اوسط سے علامات باقی

خطوط کی دریافت ہو سکتی ہیں بموجب علامات اوتار کے قیستین و کی جدول آئندہ
 میں معلوم ہو گئی جبکہ مقام اوسکا فرض کیا جاوے مختلف حصص سطح جو میں جو آئندہ
 حصوں میں تقسیم کی گئی ہیں بوسیله اوتار کے اور جبکہ مقام نقطہ کا علیحدہ علیحدہ
 ہر ایک حصہ میں مان لیوین نوعلا متین اوسکی اوتار کی یہ ہو گئی
 $+ + + + +$ جبکہ مقام نقطہ کا زاویہ لا اور ع میں فرض کیا جاوے۔

$$+ - + - + \dots \dots \dots لا اور ع$$

$$- - + - + \dots \dots \dots لا اور ع$$

$$- - + - + \dots \dots \dots لا اور ع$$

$$+ - + - + \dots \dots \dots لا اور ع$$

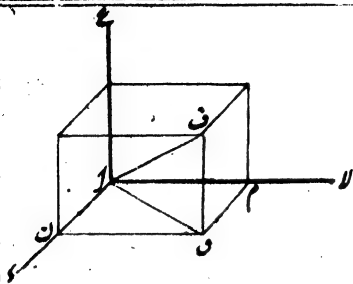
$$+ - + - + \dots \dots \dots لا اور ع$$

$$- - + - + \dots \dots \dots لا اور ع$$

$$- - + - + \dots \dots \dots لا اور ع$$

(۳۸۲) واضح ہو کہ مقام ایک نقطہ کا ایک سطح میں تین سطحوں عمودی میں سے
 فرض کر سکتی ہیں اور اس صورت میں وہ عمود ہو کہ کہیجا جاوے نقطہ مفروضہ ہی اس
 سطح میں =۔ مثلاً اگر نقطہ مفروضہ سطح لا میں فرض کیا جاوے تو حاصل
 $ع =$ اسیو سطح مساو اتین نقطہ کی یہ ہو گئی لا - ط اور ع = ص اور
 $ع =$ یا (لا - ط) + (ع - ص) =۔ اور اگر نقطہ مفروضہ سطح لا میں
 فرض کیا جاوے تو اس صورت میں مساو اتین نقطہ مفروضہ کی یہ ہو گئی لا = ط اور ع =

اور $E = S$ اور اگر نقطہ مفروض سطح E میں فرض کیا جاوے تو سادہ اتین
یہ ہوگی $L = 0$ اور $V = S$ اور اگر نقطہ مفروض محور L پر واقع
ہو تو فاصلہ اسکے سطح L اور E سے $S = 0$ کی ہوگا یہ سادہ اتین
یہ ہوگی $L = 0$ اور $V = 0$ اور $E = 0$ اس لیے دریافت ہو سکتی ہیں
سادہ اتین نقطہ مفروض کی جبکہ مقام اسکے باقی محور L پر فرض کیا جاوے
(۳۸۴) نقاط Q اور R اور S شکل گذشتہ کے نقاط نشان نقطہ
کی سطح عمودی پر ہیں جبکہ محور L نقطوں کے صرف وہ فرض کئے جاویں گے
سطح میں وہ یقیناً ہیں تو ظاہری کہ سادہ اتین Q کی سطح L میں یہ ہوگی
 $L = 0$ اور $V = S$ اور سادہ اتین R کی سطح L میں یہ ہوگی $L = 0$
اور $E = S$ اور سادہ اتین S کی سطح E میں یہ ہوگی $V = S$ اور
 $E = S$ یہاں سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ اگر نشان ایک نقطہ کے دو سطحوں عمودی
پر معلوم ہوں تو نشان اسکے تیسری سطح پر بھی دریافت ہو سکتا ہے مثلاً اگر نشان
اور R معلوم ہو تو کیچھو خط RS اور R متوازی E کے اور Q اور
 S متوازی L اور R کے تو اب ظاہری کہ مقام Q کا آسانی معلوم ہو
(۳۸۵) دریافت کرو فاصلہ Q نقطہ Q کا نقطہ شروع Q میں فرض
کرو کہ Q اور R اور R اور E محور متقاطع علی التوا میں اور $R = 0$ اور
 $Q = R$ اور $Q = R$ اور $E = 0$ اور Q اور R اور E اور Q اور R اور
 $Q = R$ اور $Q = R$ اور $E = 0$ اور Q اور R اور E اور Q اور R اور



$$ف^2 = لا^2 + ع^2 + ا^2$$

(۳۸۶) فرض کرو کہ ا

اور م اور ح وہ زاویہ

بین جو کہ ا ف بنا تا ہی محور

لا اور د اور ع سی تو لا = م = ا ف جم ف ا م = ف جم ا اور د = م ق

= ا ن = ا ف جم ف ا ن = ف جم م اور ع = ف ق = ا ف جم ف ا ق

$$ف جم ج = ف^2 = لا^2 + ع^2 + ا^2 = ف^2 (جم ا) + ف^2 (جم م)$$

$$+ ف^2 (جم ح) = ف^2 (جم ا) + ف^2 (جم م) + ف^2 (جم ح) = ۱$$

(۳۸۱) دریافت کرو فاصد در میان دو نقطہ کے فرض کرو کہ ا و ا نقطہ ف

کی لا اور د وسیع اور ا و ا نقطہ ق کے لا اور د اور ع ا مین تو اب ظاہری

کہ فاصد در میان ان نقاط کے مساوی قطر اوس محکمہ جسکی متصل طرفیں مساوی

حاصل تقریب متوازی ا و ا نقاط کی ہر معنی موافق شکل گذشتہ کے $ف = (لا - ا)^2$

+ (د - ع)^2 + (ا - ع)^2 اگر فاصد نقطہ لا اور د اور ع ا نقطہ

لا اور د اور ع ۲ نقطہ شروع سے مساوی ف ا اور ف ۲ کے فرض کیا جاوے

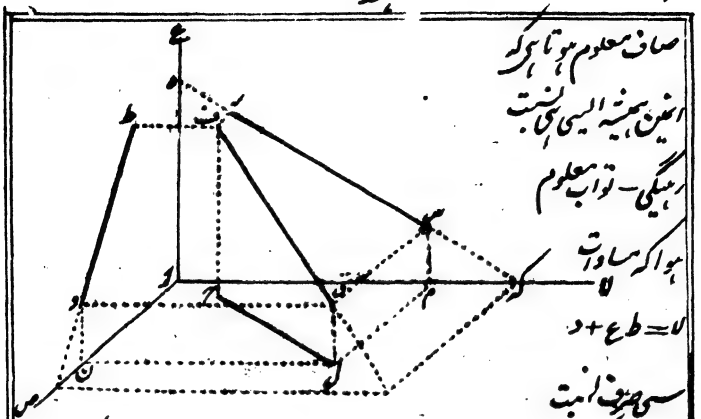
تو صورت گذشتہ اس طرح لکھی جاوے گی $ف = ف^2 + ف^2 - (۵ لا + ۵ د + ۵ ع)$

$$+ ۲ ع + ۲ لا + ۲ د$$

بیان خط مستقیم کا

(۳۸۹) ظاہری کہ ایک خط مستقیم پیدا ہو تا ہی تقاطع کرنے دو سطحوں کی

۴ در مقام اس خط کا دریافت ہوگا جبکہ مقام اون سطحوں کا معلوم ہو جسکی تقاطع
سی خط مذکور پیدا ہوا ہے یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ خط مفروض معلوم ہو سکتا ہے
بوسیہ کہ چنی سطحوں نشانی کے جنگا مقام مقرر ہو جا دیگا بوسیہ تقاطع
ان سطحوں اور سطحوں عمودی کے یعنی بوسیہ کہ چنی خط نشانی مفروض کے اور
سطحوں تقاطع علی التوایم کی تو اب مقام خط کا موافق قواعد نہ سہ کی دریافت
ہو جا دیگا اور مقام اسکا بوسیہ جبر مقابلہ کے معلوم ہو سکتا ہے جبکہ مساواتین
اوسکی خطوط نشانی کی سطحوں تقاطع علی التوایم پر معلوم ہو جا دیگی فرض کرو کہ
محور E وتر العرض ہو تو ہر ہی کہ مساوت خط نشانی کی سطح L مین یہ
ہوگی $L = طع + د$ موافق (۳) کے اور مساوت خط نشانی کی سطح E
مین یہ ہوگی $E = م + ص$ چونکہ ان دونوں مساواتوں سی مقام خط کا معلوم
ہو جاتا ہے اسوجہ سے انکوں مساواتین خط مستقیم کی کہتے ہیں —
(۳۹۰) واسطی توضیح دعوی گذشتہ کے فرض کرو کہ $ن$ ایک خطی جسکی
مساواتین دریافت کرنی جا رہی ہیں اور مان لو کہ رس خط نشانی خط مفروض
کا سطح L مین اور $ط$ سطح E مین اور $ن$ کی سطح L مین ہیں اور
فرض کرو کہ $L = طع + د$ مساوت خط رس کی اور $E = م + ص$
مساوت $ط$ کی ہی تو اب ہر ہی کہ کسی ایک نقطہ کی سطح نشانی
 $ن$ رس مین وہی قسمتین L اور E کی ہیں جو اوسکا نقطہ نشانی رس
رکھتا ہے یعنی اوتار $ام$ اور $م$ مین مساوی $ن$ اور $ل$ کی ہیں یہاں سی



لا اور ع خط رس کی ہی تعبیر ہوتی ہے وہ سواء الکی او س نسبت کو تعبیر
 کرتی ہے جو کہ درمیان تمام نقاط و رس کی ہے۔ اسے صی مساوت
 د = م + ص صرف ط و سی ہی تعلق نہیں رکھتی وہ سطح ط و ق ہی تعلق
 رکھتی ہیں تو اب ثابت ہو کہ دو نو مساوت گذشتہ خط و سی تعلق رکھتی
 ہیں جو کہ فصل مشترک درمیان سطح نشانی کی ہے اور یہی معلوم ہوتا ہے کہ یہ
 دو نو مساوتین صرف رسی خط کی ہو سکتی ہیں۔ اب یہاں ہی معلوم ہوا کہ
 مساوتین خط مستقیم و کی یہ ہیں $لا = ط + د$ اور $د = م + ص$
 جبکہ دور کریں ہم مقدار ع کو بوسیلة ان مساوتوں کی تو حاصل ہو گا یہ
 $\frac{1}{ط} (لا - د) = \frac{1}{م} (د - ص)$ یا $د - ص = \frac{ط}{م} (لا - د)$ اور اس
 مساوت سے وہ نسبت معلوم ہوتی ہے جو کہ درمیان کم اور کم ال کے ہے اور یہ
 اوتار نقطہ ل کے ہیں $\frac{ط}{م}$ خط و ق کے کا ہی تو اب معلوم ہوا کہ یہ مساوت
 خط نشانی ل ج کی سطح لا و مین ہے۔

(۳۹۱) مساواتوں آئندہ میں $لا = ط + د$ اور $د = م + ع$ + ص مقدار
 د تغییر کرتی ہی اوبس فاصلہ کو جو کہ درمیان نقطہ شروع اور اس نقطہ کی پہچان
 رس تقاطع کرتا ہی خط اول سے یعنی $ط = ا$ کہ اسطرحی ص = ر ص فرض کر
 $لا = ع = - = \frac{د}{ط} = ا$ کہ = - ط وہ لیکن کہ =
 د و مس اول = - د و مس ع در جواب ثابت ہوا کہ ط ماس د و مس زیادہ
 کا ہی جو کہ رس بناتا ہی ر ع سی اور اسطرح معلوم ہو سکتا ہی کہ م ماس د و مس
 زاویہ کی ہی جو وہ بناتا ہی ر ع سی - - - - -
 (۳۹۲) واضح ہو کہ مقام خط مستقیم کا مختلف ہو گا موافق علامات جبر
 د اور ص اور ط اور م کے اور چونکہ اون صورتوں مساوات مستقیم سے
 جو کہ تبدیلی علامات جبر یہ مقدار دیر مذکور سی پیدا ہوگی کسی نوع کا متصور نہیں ہوتا
 اور حل کرینیں انکی کی طرح کی دقت واقع نہیں ہوتی سی اسطرح ہم انکو متجا
 بیان نہیں کرینگے اور اس جابی صرف اون صورتوں کو لکھیں گے جو کہ مطبق
 اقیمتوں ط اور م اور ص اور د کی تبدیلی میں پیدا ہوگئی اور علامت جبر کا
 نہیں کرینگے اب فرض کر د = . اور ص = . تو لا = ط + د اور د = م + ع
 جواب موافق ان مساواتوں کے خطوط ثانی نقطہ شروع میں سے گزرتی ہیں
 اور اس سے معلوم ہوتا ہی کہ خط مطلوب ہی نقطہ شروع میں سے گزرتا ہی اور مساوات
 تیسرے خط ثانی کی یہ ہوگی $د = \frac{ط}{ط} لا$ فرض کر د = . تو لا = ط + ع
 اور د = م + ع + ص یہاں سی ظاہر ہوتا ہی کہ خط ثانی سطح لا د میں گزرتا ہی

نقطہ شروع سے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ خط مستقیم گذرنا ہی محور z میں ہے
 جو کہ عمود ہی سطح la پر اور اگر $v =$. تو موافق مرقومہ بالا کی ثابت ہو گیا
 کہ مساواتین $la = طع + د$ اور $د = م$ ع تعلق رکھتی ہیں اور اس خط سے
 جو کہ گذرنا ہی محور la میں ہے اور اگر یہ مساواتین فرض کیا وین $د = ط لا$
 اور $د = م$ ع + v تو خط مستقیم محور $ع$ میں سے گذر گیا صورت اخیر تعبیر
 ہو سکتی ہے جبکہ فرض کریں شکل گذشتہ میں کہ خط la ح گذرنا ہی نقطہ شروع
 زمین سے تو اب ظاہر ہے کہ مساوت خط la ح کی بیہ ہوگی $د = ط لا$ اور
 مساوت $د = ط$ کی بیہ ہوگی $د = م$ ع + v اب اگر دو سطحین $ط$ و $ع$ کے
 جادین کہ ایک انہیں سے $ط$ و $ع$ میں سے گذری اور سطح $ع$ پر عمود ہو اور دو سر la ح
 میں سے گذری اور سطح la پر عمود ہو تو اب ظاہر ہے کہ دونوں سطح نقطہ $ع$ میں سے گذریں
 اسیو سطحی خط مطلوب ہی اس نقطہ پر گذریگا -

(۳۹۳) فرض کرو کہ $م =$. $la = طع + د$ اور $د = ص$ اس سے معلوم
 ہوتا ہے کہ خط مطلوب اور سطح میں جو متوازی سطح la ع کی اور اس سے $ص$ کی فاصلہ
 پروجہ ہی اگر شکل گذشتہ کو مطابق اس خاص صورت کی فرض کریں تو ظاہر ہے کہ
 $ط$ و $ع$ پر عمود فرض کرنا چاہیے اب $ص$ ظاہر ہے کہ $ف$ مساوی اور متوازی خط
 زمین کے ہی اور سطح la و $ع$ میں جو عمود ہی سطح la ع پر واقع ہوگا فرض کرو
 کہ $ط =$. $la = د$ اور $د = م$ ع + v اسی ثابت ہوتا ہے کہ خط مطلوب
 متوازی سطح $ع$ کی ہی اس طرح مساوت $ع = م$ اور $د = ط لا + د$

اوس خط سے تعلق رکھتی ہے جو واقع ہے ایک ایسی سطح میں جو متوازی دے کی ہے
 (۳۹۴) ظاہر ہے کہ ہم ایک خط مستقیم کو ایک سطح میں سطوح متقاطع علی
 القوایم میں سے فرض کر سکتے ہیں مثلاً فرض کرو کہ وہ واقع ہے سطح دے میں تو
 ظاہر ہے کہ مساوات میں اس خط کی یہ ہوگی $d = m + v$ اور $la = 0$ اور اگر
 خط مطلوب سطح لاے میں فرض کیا جائے تو مساوات میں یہ ہوگی $la = ط + د$ اور
 اور $d = 0$ اور اگر سطح لاے میں ہو تو یہ مساوات میں حاصل ہوگی $d = ط + لا + د$
 اور $e = 0$ — — — — —
 (۳۹۵) اگر خط مستقیم عمود ہو ایک سطح پر سطوح متقاطع علی القوایم سے
 مثلاً فرض کرو کہ وہ عمود ہے سطح دے پر تو ظاہر ہے کہ $ط$ اور m مساوی صفر
 کے ہو جائیگی اسبواسطے مساوات میں اس خط کی یہ ہو جائیگی $la = د$ اور
 $d = v$ اور $e = 0$ اور ظاہر ہے کہ جب خط مستقیم عمود ہو سطح دے
 پر تو $la = د$ اور $d = 0$ اور $e = m$ اور مساوات میں اس خط کی جبکہ
 یہ فرض کیا جائے عمود سطح دے پر یہ ہوگی $la = 0$ اور $d = v$ اور
 $e = m$ — — — — —
 (۳۹۶) دریافت کردہ نقاط جہاں کہ خط مستقیم قطع کرتا ہے سطوح متقاطع
 علی القوایم کو فرض کرو $la = ط + د$ اور $d = m + v$ اور مساوات میں
 خط مستقیم کے میں تو اب ظاہر ہے کہ جب یہ خط سطح لاے سے ملے تو $e = 0$
 $la = د$ اور $d = v$ اور مساوات میں نقطہ مطلوب کی ہوگی اسبواسطے

ع = ص + د = ط اور لا = ط + ص + د مساواتین اوس نقطہ کی ہو گئی

جہاں کہ خط مستقیم متساوی سطح لا ع سی اور ع = د اور د = ط اور د = ط

+ ص مساواتین اوس نقطہ کی ہو گئی جہاں کہ وہ قطع کرتا ہی سطح ع د کو ۔

(۳۹۷) ظاہر ہے کہ چار مقدارین ایک خط مستقیم کی مساواتو میں ہوتی ہیں

اب اگر یہ چاروں مقدار معلوم ہوں تو مقام خط مستقیم کا معلوم ہو جائیگا

کیونکہ اگر فرض کریں ع ایک خاص قیمت ع کی تو مساواتین خط مستقیم کی یہ

ہو گئی لا = ط ع + د = ط ع + د = لا اور د = م ع + ص = م ع

+ ص = د اسی قیمتین لا اور ع کی دریافت ہو جائیگی قطع کرد

اوم = لا شکل گذشتہ میں اور کچھ م ل = د ستوازی ل کی اور کچھ

ل سی عمود ل ق = ع تو اب ظاہر ہے کہ نقطہ ق ایک نقطہ خط مطلوب کا ہوگا

اور اس طور سے مختلف نقطہ خط مطلوب کی معلوم کر کے مقام خط مطلوب کا معلوم

ہو جائیگا واضح ہو کہ خط مستقیم کو ستوازی ایک خط کی یا کد زتا ہو ایک

نقطہ مفروض میں سے فرض کر سکتے ہیں یعنی ہم ایسی شرط فرض کر سکتے ہیں

جتنے وسیلہ سے تقادیر ط اور م اور د اور ص کے معلوم ہو جائیگی اس طور

بہت سی شکلیں پیدا ہو گئی جیسا کہ فقرہ (۲۰ اور ۵۰) میں بیان کی گئی

ہیں مساوت خط مستقیم کی بمطابق وہ بعد کی دریافت کی گئی ہے۔

بیان اشکال خطوط مستقیم کا

(۳۹۸) دریافت کرد مساواتین ایک خط مستقیم کی جبکہ وہ گذری ایک

ایک نقطہ مفروض میں سے — فرض کرو کہ نو مار نقطہ مفروض کی یہ ہیں لا

اور ک، اور ع، اور سا و اتین اس کی یہ ہیں لا = طع + د اور

د = جم + ص چونکہ خط مستقیم نقطہ مفروض میں سی گذرنا ہی تو ہے

کہ خط نشانی اس کا ہی نقطہ نشانی نقطہ مفروض میں سے گذرے گا چونکہ خط نشانی

اس کا لا = طع + د نقطہ لا، اور ع، اور ا میں سی گذرنا ہی تو ہے ہر ہی مساوی

اس خط نشانی کی یہ ہوگی لا = طع + د لا - لا = ط (ع - ع)

اور اسطرح سی - د = م (ع - ع) تو اب معلوم ہوا کہ یہ مساوی ہیں

ہیں چونکہ مقادیر ط اور م مجہول ہیں تو اس سی معلوم ہونامی کہ لا نہایت

ایک نقطہ میں سے گذر سکتی ہیں اگر نقطہ مفروض سطح لا میں فرض کیا جاوے تو

ع = لا - لا = طع اور د - د = م ع اگر نقطہ مفروض محور

لا پر فرض کیا جاوے تو ع = لا اور د = لا - لا = طع اور

د = م ع اور اسطرح سے مساواتوں گذشتہ کی مختلف صورتیں ہو سکتی ہیں

موافق مختلف مقاموں نقطہ مفروض کے —

(۳۹۹) دریافت کرو مساواتین ایک خط مستقیم کی جبکہ وہ گذری دو

(لا اور د اور ع) اور (لا اور د اور ع) میں سے چونکہ خط مستقیم

اس نقطہ (لا اور د اور ع) میں سی گذرنا ہی تو مساوی اس خط کی یہ

ہوگی لا - لا = ط (ع - ع) اور د - د = م (ع - ع) اور چونکہ

وہ اس نقطہ (لا اور د اور ع) میں سی ہی گذرنا ہی تو مساوی

مطلوب کی اس صورتیں یہ ہوگی $۲۱ - ۱۱ = ۱۰$ $ط = (۲۴ - ۱۴)$ اور
 $۲ - ۲۰ = (۲۴ - ۱۴)$ $ط = ۱۱ - ۲۱$ اور $۱۵ - ۲۵ = ۱۰$ $ط = ۱۱ - ۲۱$
 سوائین خط مطلوب کی یہ ہوگئی $۱۱ - ۱۱ = ۰$ $ط = (۲۴ - ۱۴)$
 اور $۱۵ - ۲۵ = ۱۰$ $ط = (۲۴ - ۱۴)$ اب ظاہر ہے کہ ان مساواتوں کے
 مختلف صورتیں ہو سکتے ہیں موافق مختلف مقاموں نقاط مفروض کی مثلاً اگر
 نقطہ اولی سطح شروع میں فرض کیا جاوے اور نقطہ دوسرا محور لاپر تو $۱۰ = ۰$
 اور $۲ = ۰$ اور $۲ = ۰$ $ط = ۱۱ - ۲۱$ اور $۱۵ - ۲۵ = ۱۰$
 $ط = (۲۴ - ۱۴)$ اگر نقطہ دوسرا نقطہ شروع پر فرض کیا جاوے تو $۱۱ - ۲۱$ اور $۱۵ - ۲۵$
 اور $۲ = ۰$ $ط = ۱۱ - ۲۱$ $ط = (۲۴ - ۱۴)$ $ط = ۱۱ - ۲۱$
 اور $۱۵ - ۲۵ = ۱۰$ $ط = (۲۴ - ۱۴)$ یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ
 سوائین اس خط کی جو کہ گذری نقطہ شروع میں سے یہ ہوگئی $۱۱ - ۲۱$ اور
 $۱۵ - ۲۵ = ۱۰$ اور یہ سوائین بطور آئندہ کی یہی حاصل ہو سکتی ہیں فرض کرو
 کہ خطوط ثانی نقطہ شروع میں سے گذرتی ہیں $ط = ۱۱ - ۲۱$ سوائین اوکئی
 یہ ہوگئی $۱۱ - ۲۱ = ۰$ اور $۲ = ۰$ اور چونکہ پہلا خط نقطہ $۱۱ - ۲۱$ اور $۱۵ - ۲۵$
 میں سے گذرتا ہے تو $ط = ۱۱ - ۲۱$ اور $ط = ۱۱ - ۲۱$ $ط = ۱۱ - ۲۱$
 (۲۰۰) دریافت کرو سوائین ایک خط مستقیم کے جو کہ متوازی ایک خط
 مفروض کی ہے چونکہ خطوط متوازی ہیں تو ظاہر ہے کہ سطح ثانی انکی یہی
 ایک سطح بر سطح متقاطع علی القیام سے متوازی ہوگئی $ط = ۱۱ - ۲۱$ $ط = ۱۱ - ۲۱$

بھی متوازی ہوگی یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر مساواتین خط معلوم کی یہ فرض
 کی جاوے کہ لا = ط + د اور د = م + ع + ص تو مساواتین خط معلوم کی
 یہ ہوگی کہ لا = ط + د اور د = م + ع + ص اگر یہ خط نقطہ مفروض
 (لا اور د اور ع) میں کسی کدڑی تو اس کی مساواتین یہ ہوگی

$$لا - د = ط - ع \quad اور \quad د - م = ع - ص \quad (۱-۲)$$

(۲۰۱) دریافت کرو نقطہ تقاطع دو خط مفروض کا خط ہر ایک کے دو خط جو کہ

واقع ہوں ایک سطح میں آپس میں مل سکتے ہیں لیکن جبکہ وہ سطح جو میں فرض
 کی جاوے تو یہ بات واقع نہیں ہوگی تو اب خط ہر ایک کی ایسی خاص نسبت درپا
 مقدار مقررہ خطوط معلوم کے فرض کرنے چاہیے تاکہ خطوط مفروض تقاطع کریں
 دوسرے کو ایک خاص نقطہ پر اس سطح معلوم کرنے اس نسبت کی فرض کرو کہ لا = ط + د

اور د = م + ع + ص مساواتین ایک خط کی ہیں اور لا = ط + د اور د = م + ع + ص
 مساواتین دوسرے خط کی ہیں ظاہری کہ نقطہ تقاطع پر قیمتیں لا اور د اور ع کی مساواتوں

$$لا - د = ط - ع \quad اور \quad د - م = ع - ص$$

$$م + ع + ص = م + ع + ص \quad یا \quad (م - م) = (ع - ع) \quad یا \quad (ط - ط) = (ص - ص)$$

یہ نسبت ضرور ہونی چاہیے درمیان مقدار مقررہ کے تاکہ خطوط معلوم تقاطع
 دوسرے کو کریں تو اب ظاہری کہ اوپر نقطہ تقاطع یہ ہوگی کہ

$$لا - د = ط - ع \quad اور \quad د - م = ع - ص \quad یا \quad (م - م) = (ع - ع) \quad یا \quad (ط - ط) = (ص - ص)$$

$$= \frac{m-m}{m-m} \text{ اور } \frac{d}{d} = 1 = \frac{d}{d} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d} + \frac{d}{d}$$
 (۴۰۲) دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ خط (ک) بنانا ہی محور متقاطع علی القوائیم
 اور بوسیلہ اسکی دریافت کرو وہ زاویہ جو کہ خط مذکور بنانا ہی سطح متقاطع علی
 القوائیم سی فرض کرو کہ مساواتیں خط معلوم کی یہ ہیں $\frac{d}{d} = 1 = \frac{d}{d} + \frac{d}{d}$ اور
 $\frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d}$ اور ظاہری کہ مساوت اس خط کی جو کہ متوازی خط معلوم کے
 اور نقطہ شروع میں سی کہ زائے ہی یہ ہے $\frac{d}{d} = 1 = \frac{d}{d} + \frac{d}{d}$ اور $\frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d}$
 کہ مساوی اس فاصلہ کی ہی جو کہ واقع ہی در میان اس نقطہ (لا) اور
 (اور ع) خط اخیر اور نقطہ شروع کی $\frac{d}{d} = 1 = \frac{d}{d} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d} + \frac{d}{d} + \frac{d}{d}$
 $\frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d}$ فرض کرو کہ کلا اور کہ و اور کہ ع تغیر کرتے ہیں
 مفادیر اون زاویوں کے جو کہ خط معلوم یا وہ خط جو کہ متوازی اسکی ہی بنانا محور
 لا اور و اور ع سے قلوب ظاہری کہ بوسیلہ خط متوازی کے جم کہ لا $\frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d}$

$$\frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d}$$
 اور جم کہ ع $\frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d} = \frac{d}{d} = \frac{m}{m} + \frac{d}{d}$ اور ظاہری کہ (جم کہ لا) + (جم کہ و)
 + (جم کہ ع) = ۱ اور یہ مساوت تغیر کرتی ہی نسبت اون زاویوں کے
 جو کہ ایک خط بنانا ہی محور متقاطع علی القوائیم سی - چونکہ یہاں محور متقاطع
 علی القوائیم فرض کی گئے ہیں تو ظاہری کہ وہ زاویہ جو ایک خط بنانا ہی ایک
 محوری نامی اس زاویہ کی ہی جو کہ یہی خط بنانا ہی اس سطح سی جو عمود اس
 محور پر قلوب ظاہری کہ اب یہ معلوم ہو جاوے گی وہ زاویہ جو کہ ایک خط بنانا ہی

سہو ح تقاطع علی الفایم سے

(۴۰۳) دریافت کرو جب التمام اور جب ہستی اور ماس اوس زاویہ کی جو کہ درمیان دو خط مفرد من کے واقع ہی فرض کرو کہ مساواتین دو خط مستقیم کی یہ ہیں

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{طع} + \text{د} \\ \text{م} = \text{ع} + \text{ص} \end{array} \right\} \text{اور} \left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{طع} + \text{د} \\ \text{م} = \text{ع} + \text{ص} \end{array} \right\} \text{یہ دو نقطہ عین باہر عین}$$

لیکن زاویہ جو درمیان انکی بینیکا مساوی ہے اوس زاویہ کی جو کہ درمیان اون دو خط کی بینیکا جو کبھی جاوین ہوازی خطوط مفرد من کے گذرتی ہوئی نقطہ شروع میں سے تو اب ظاہر ہی کہ صورت سوال کی یہ ہو جاوے گی دریافت کردہ زاویہ جو کہ واقع ہی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{طع} \\ \text{م} = \text{ع} \end{array} \right\} \text{درمیان اون خطوط کی جنکی مساواتین یہ ہیں} \quad (۱) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{طع} \\ \text{م} = \text{ع} \end{array} \right\} \text{فرض کرو کہ ر} = \text{اوس فاصلہ کے ہی جو کہ درمیان ایک}$$

نقطہ (لا اور ا) اور ع خط (۱) اور نقطہ شروع کی واقع ہی اور ر = اوس فاصلہ کی جو درمیان نقطہ (لا اور ا) اور ع خط (۲) اور نقطہ شروع کی واقع ہی اور ف = اوس فاصلہ جو درمیان ان دو نقطہ کے ہی - اور ۵ = اوس زاویہ کے جو درمیان خطوط

معلوم کے واقع ہی - تو اب ظاہر ہی کہ $\text{ر} = \text{ا} - \text{ب} - \text{ج} = ۵$ - $(۱۰ - ۱۱) + (۱ - ۱۳) + (۱۴ - ۱۵)$ موافق فقرہ (۳۸۸) کی = $\text{ا} + \text{ب} + \text{ج}$

$$\begin{aligned} & \text{ا} + \text{ب} + \text{ج} = ۱۰ + ۱ + ۱۵ - ۱۳ = ۱۳ \\ & ۲ (۱۰ + ۱۱ + ۱۳) = ۵۴ \end{aligned}$$

لیکن لا ا + کو ا + ع ا = ط ع ط ع ا + م ع م ع ا + ع ا = ع ا

$$(ط ط + م م + ع ا) = ع ا اور ر ر = \sqrt{(لا^۲ + س^۲ + ع^۲ + لا^۲ + س^۲ + ع^۲)}$$

$$ع ا = \sqrt{ع ا^۲ + م م^۲ + ط ط^۲} \times \sqrt{لا^۲ + س^۲ + ع^۲} = \sqrt{(ط م - م م)^۲ + (ط - ط)^۲ + (م - م)^۲}$$

$$\text{مین جم} = ۰ = \frac{لا + کو + ع ا}{ر ر} = \frac{\sqrt{(ط م - م م)^۲ + (ط - ط)^۲ + (م - م)^۲}}{\sqrt{(ط م + م م)^۲ + (ط - ط)^۲ + (م - م)^۲}}$$

$$\text{تو اب ظاہری کہ جسہ} = \sqrt{(ط م - م م)^۲ + (ط - ط)^۲ + (م - م)^۲} = \sqrt{(ط م + م م)^۲ + (ط - ط)^۲ + (م - م)^۲}$$

$$\text{اور سہ} = \frac{\text{جسہ}}{\text{جم}} = \frac{\sqrt{(ط م - م م)^۲ + (ط - ط)^۲ + (م - م)^۲}}{\sqrt{(ط م + م م)^۲ + (ط - ط)^۲ + (م - م)^۲}}$$

واضح ہو کہ جب تمام اوس زاویہ کی جو درمیان دو خط معلوم کے ہر اجزائی
زاویہ نہیں بھی معلوم ہو سکتی ہے جو دو خط معلوم (کہ) اور (کہ) بنائی ہیں پھر

متقاطع علی القوائیم سی کیونکہ لا = رجم کہ لا اور س = رجم کہ س اور

ع = رجم کہ ع اور لا = رجم کہ لا اور س = رجم کہ س اور

$$ع ا = رجم کہ ع ا = \text{جم} = ۰ = \frac{لا}{ر ر} + \frac{کو}{ر ر} + \frac{ع ا}{ر ر}$$

جم کہ لا جم کہ لا + جم کہ کو جم کہ س + جم کہ ع جم کہ ع

(۴۰۴) اگر خطوط مفروض متوازی ہوں تو ظاہری کہ جسہ = ۰

$$= (ط م - م م) + (ط - ط) + (م - م) = ۰ \text{ اور ظاہری کہ شرط}$$

اس مساوات کی اس وقت پوری ہوگی جبکہ ط = ط اور م = م اور ط م =

ط م دو شرطین اول کی وہی مین جو فقرہ (۴۰۰) غیر بیان کی گئی ہیں اور

تیسری شرط دواول شرطوں سے نکلتی ہے یعنی اگر دواول مساوات کی شرط سادہ



کے پوزی ہوگی تو ظاہر ہے کہ تیسری شرط یہی ان دونوں سے حاصل ہوگی
(۴۰۵) اگر خطوط سفروض ایک دوسرے پر عمود ہوں تو $ج = ۰$

خط اول + م + م' = ۱۔ یا حجم کہ لا حجم کہ لا + حجم کہ د حجم کہ د + حجم کہ ع حجم کہ ع
 = ۰ واضح ہو کہ ایک خط دوسری خط پر سطح جو بین عمود او سوخت ہو گا جسکے
 خط اول اس سطح میں واقع ہو جو عمود خط د ویم پر ہے یہاں ہی معلوم ہوتا ہے
 کہ لا نہایت خط ایک خط مفروض پر عمود ہو سکتے ہیں چنانچہ مساوات گذشتہ
 سے بھی جو مساوات خط عمود کی ہی معلوم ہوتا ہے کیونکہ اس میں چار مقداریں مجهول
 ہیں اور ایک مساوات ہی —

(۴۰۰) اگر خط فرض ایک دوسری کو تقاطع پہی کرین تو موافقت
نقہ (۴۰۱) کی ایک مساوات آئندہ بھی حاصل ہوگی (د-د) (م-م)
= (ص-ص) (ط-ط) باوجود اس شرط کی بھی لاہیات عمود ایک دوسری خط
پر کھینچ سکتے ہیں کیونکہ لاہیات سطح عمود دوسری خط پر کھینچ سکتی ہیں اور ہر ایک خط
میں لاہیات ایسی خط کھینچ سکتے ہیں جو ایک خط فرض سے ملین گے۔

(۷۷) دریافت کرو، ساتھ ایک خط کی جو کہ کل نقطہ مفروضہ (۱۱) اور

۱۰ اور عا) میں سہی اور عمود ہوا ایک خط برحسب مساویہ (۱) ہی

فرض کرو کہ مساویہ خط کی پیہر

$$(1) \begin{cases} ط + ع = ل \\ م + ع = ص \end{cases}$$

اور جبکہ یہ نقطہ مفروضہ میں ہے لہذا کیا تو صورت اسکی یہ ہو جاوے گی

$$\left. \begin{aligned} (۱) \quad & \begin{cases} \text{لا} - \text{ط} = ۱۵ \\ \text{اور} - \text{د} = ۱۴ \end{cases} \\ (۲) \quad & \begin{cases} \text{ط} - \text{ع} = ۱۴ \\ \text{م} - \text{ع} = ۱۴ \end{cases} \end{aligned} \right\}$$

یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ دساواتیں

$$\text{آئندہ حاصل ہو گئی موافق شرط سوال کے} \quad \text{ط} + \text{م} + ۱ = ۰ \quad (۳)$$

$$\text{اور} \quad (\text{د} - \text{د}) - (\text{م} - \text{م}) - (\text{ص} - \text{ص}) = (\text{ط} - \text{ط}) = ۰$$

$$\text{چونکہ} \quad \text{د} = \text{لا} - \text{ط} \quad \text{اور} \quad \text{ص} = \text{م} - \text{ع} \quad \text{تو}$$

$$(\text{لا} - \text{ط} - \text{ع} - \text{د}) - (\text{م} - \text{م}) - (\text{ص} - \text{ص}) = (\text{ط} - \text{ط}) = ۰ \quad (۴)$$

اب جو سیدھا داتون (۳) اور (۴) کے قیمنین م اور ط کی جگہ حاصل ہو گئی

$$\frac{(\text{لا} - \text{د}) + (\text{ط} + \text{ع}) - \text{م} - (\text{ص} - \text{ص})}{(\text{ط} + ۱)} = \text{م}$$

$$\text{اور} \quad \frac{(\text{د} - \text{د}) + (\text{ط} + \text{ع}) - \text{م} - (\text{ص} - \text{ص})}{(\text{ط} + ۱)} = \text{ط}$$

$$\text{اور} \quad \frac{(\text{د} - \text{د}) + (\text{ط} + \text{ع}) - \text{م} - (\text{ص} - \text{ص})}{(\text{ط} + ۱)} = \text{ط}$$

$$\text{اور} \quad \frac{(\text{د} - \text{د}) + (\text{ط} + \text{ع}) - \text{م} - (\text{ص} - \text{ص})}{(\text{ط} + ۱)} = \text{ط}$$

اگر یہ قیمنین م اور ط کی مساوت (۲) میں لکھی جاوے تو ہمیں حاصل

ہوگی مساوت خط مطلوب کی جو ایک نقطہ مفروضے کے گزرنے کی عمود ایک خط مفروضہ پر

ہوگا اور خاص صورتوں میں اور طریقے استعمال میں آسکتی ہیں مثلاً دریافت کرد

مساوت ایک خط کی جو محور دسی گزرتا ہے اور اسی پر عمود ہی تو ظاہر ہے کہ اس

صورت میں لا = ۰ اور ع = ۰ اس لیے مساواتیں خط مطلوب کی یہ

ہو گئی لا = ط ع اور د = م = ع لیکن خط مطلوب محور پر عمود

بھی ہی اس لیے م = ۰ تو اب ثابت ہوا کہ مساواتیں خط مطلوب کی یہ ہو گئی

لا = ط ع اور د = م اگرچہ تقاطع علی القوایم موافق اپنی مطلب فرض ہے

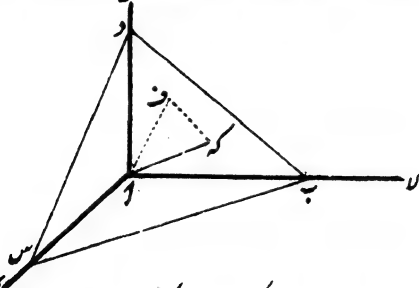
جاوین تو یہ سوال اور سوال کے اور سوالات با سالی حل ہو گئی اور اس طریقہ کا بیان اگلی کیا جاوے گا۔

باب سیوم

(۳۰۸) ظاہر ہے کہ ہر ایک سطح خیال کی جا سکتی ہے کہ وہ پیدا ہوئی ہر حرکت ایک خط سے کردہ دوسرے خط کی اس طرح کہ پہلا خط عمود دوسرے خط پر ہو فرض کرو کہ ایک نقطہ شروع محور لا اور لا اور لا کے کاہی اور ب س د ایک جہہ سطح کاہی اور کہ عمود اس سطح پر نقطہ شروع سے کہی جا گیا ہے اور ف ایک نقطہ سطح مفروض میں ہے تو اب ظاہر ہے کہ موافق تعریف مرقومہ بالا کے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سطح مفروض پیدا ہوئی ہر حرکت کہ ف سے گزرا کہ کے اس طرح پر کہ زاویہ کہ کہ ف قائمہ ہے۔

دریافت کرو سادہ سطح مفروض کی فرض کرو کہ (لا اور لا اور ع) اوتار نقطہ ف کی ہیں اور (لا اور لا اور ع) اوتار نقطہ کہ کے ہیں اور مان لو کہ فاصلہ

کہ = ف



اب ظاہر ہے کہ مربع اف = مربع کہ + مربع کہ ف یعنی لا + د + ع =

ف + (لا - لا) + (د - د) + (ع - ع) = ف + لا + د + ع

+ لا + د + ع - لا - د - ع =

$$۲۰ (۱۷۱ + ۱۷۱ + ۱۷۱) = ۱۷۱ + ۱۷۱ = ۱۷۱$$

$$۱۷۱ + ۱۷۱ + ۱۷۱ = ۱۷۱$$

$$(۲۰۹) \text{ فرض کرو } \frac{۱}{۱۷۱} = م \text{ اور } \frac{۱}{۱۷۱} = ن \text{ اور } \frac{۱}{۱۷۱} = س$$

یہ واسطی صورت مساوات گذشتہ کی یہ ہوگی م لا ن و س ع = ۱

واضح ہو کہ یہ مساوت سطح کی بہت آسان ہے اس واسطے ہم اس کو سوالات آئندہ میں استعمال کریں گے اور فرض کرو کہ $\frac{۱}{۱۷۱} = ط$ اور $\frac{۱}{۱۷۱} = ص$ اور $\frac{۱}{۱۷۱} = ه$

$$\frac{۱}{۱۷۱} + \frac{۱}{۱۷۱} + \frac{۱}{۱۷۱} = ۱ \text{ اور ظاہر ہے کہ یہ مساوت بہت سہل ہے اور بہت$$

مقادیر ط اور ص اور ه تعبیر کرتی ہیں اب اور اس اور او کو جو فاصلہ

در میان نقطہ شروع اور اداں نقاط کی ہے جان سطح تقاطع کرتی ہے محور متقاطع

علی القوائیم سہی او یہ فاصلہ سطح دریافت ہو سکتا ہے فرض کرو کہ دو نوے

$$\text{اور } ع = ۰ \text{ } \frac{۱}{۱۷۱} = ۱ \text{ یا } اب = ط \text{ اور اس میں حسی باقی خطوط معلوم}$$

$$(۲۱۰) \text{ فرض کرو کہ نقطہ سطح کا تعبیر ہوتا ہے حرف ک سے اور فرض کرو کہ زاویہ}$$

جو کہ یات بناتا ہے محور متقاطع علی القوائیم سے تعبیر ہوتی ہیں ف لا اور

$$ف و اور ف ع اور فرض کرو کہ لا اور ک و اور ک ع تعبیر کرتی ہیں$$

اوں زاویوں کو جو سطح مفروضہ بناتی ہے محور متقاطع علی القوائیم سے

اور چونکہ اب زاویہ قائمہ ہے اور اب و وہ زاویہ ہے جو سطح محور اب سے

$$\text{بناتی ہے } \frac{۱}{۱۷۱} = ط \text{ جم ف لا اور } \frac{۱}{۱۷۱} = ص \text{ جم ف و اور}$$

$$\frac{۱}{۱۷۱} = ط \text{ جم ک لا } = \frac{۱}{۱۷۱} = ص \text{ جم ک و}$$

اور ف = ۵ جم ف ع }
 = ۵ جم ک ع }
 اسی واسطی جبکہ لکھی جاوے قیمتیں ط اور ص اور
 کی مساوت سطح میں تو لاجم ف لا + ۵ جم ف د + ۵ جم ف ع = ف
 لا جس ک لا + ۵ جس ک د + ۵ جس ک ع = ف

(۴۱۱) فرض کرو کہ ک د ع تغیر کرتا ہی اوس زاویہ کو جو سطح مفروض بناتی ہے
 سطح ک ع سے اور چونکہ کہ ارب مساوی اوس زاویہ کے ہی جو سطح مفروض بناتی
 ہی سطح ک ع سے تو جم ف لا = جم ک د + ۵ جم ک ع اسی واسطی مساوت سطح کی یہ
 ہو جاوے گی لاجم ک د ع + ۵ جم ک د + ۵ جم ک لا + ۵ جم ک ع = ف
 (۴۱۲) چونکہ (۳۸۶) میں ثابت ہوا ہی کہ (جم ف لا) + (جم ف د) + (جم ف ع) =
 ۱ تو ظاہر ہی کہ (جم ک لا) + (جم ک لا) + (جم ک لا) = ۱

اگر تو تغیر کرے سطح ک کو تو سطح ف فی اس سطح کا سطح متقاطع علی القوایم برابر جم ک لا
 لاجم ک لا اور لاجم ک د ع ہو گا اسی واسطی (جم ک لا) + (جم ک لا) + (جم ک لا) = ۱
 و لاجم (جم ک لا) + (جم ک لا) + (جم ک لا) = ۱ اسی واسطی کہ (۴۱۲) کی
 اس مساوت کی جو عدد و زمین تکلیف کی سفید واسطی دریا کرنی اوس سطح کی ہو گئی جو متعلق ہیں جو سطح
 علی القوایم ہی مثلاً اگر مساوت سطح کی یہ ہو ط + ص = ۱ اور ظاہر ہی ہو گیا شکل دریا
 سطح اب س = ط ص اور سطح دوس = ص ط اور سطح ارب د = ط ص تو جلیب
 کہ سطح ب س د = ۱/۲ (ط ص + ص ط + ط ص) اور ظاہر ہی کہ
 مخروط اس ب د = ۱/۲ ط ص = ۱/۲ ط ص

(۴۱۳) دریافت کردہ زاویہ جو ایک سطح بانی ہی سطوح متقاطعہ القوام

سے اوقیت ان زاویوں کی ایسی اجزاء میں دریافت کرنی منظور ہے جو اس

سطح مذکور کی مساوت کی مین فرض کرو کہ مساوت سطح مفروض کی یہی

م لا + ن د + س ع = ا اور مساوت ایک خاص سطح کی اجزای اوٹ

میں جو وہ سطح بانی ہی سطوح متقاطعہ القوام سے موافق فقرہ (۴۱۱) یہی

لاجمک د ع + د جمک . ل ا ع + جمک . ل ا د = ف تو اب بوسیله مساوت

اور مساوت گذشتہ کی م = جمک د ع اور ن = جمک ل ا ع

س = جمک ل ا د

۲ م + ۲ ن =

۲ س = ۱/۲ = ف = ۲ م + ۲ ن + ۲ س = تو اب ظاہر ہے کہ

جمک . ل ا ع = م ف = ۲ م + ۲ ن + ۲ س اور جمک . ل ا د = ن ف

۲ م + ۲ ن + ۲ س = اور جمک . ل ا د = س ف = ۲ م + ۲ ن + ۲ س

(۴۱۴) ایک سطح کی مساوت کی مختلف صورتیں ہو سکتی ہیں موافق مختلف

مقام سطح کے فرض کرو کہ سطح نقطہ شروع میں سے گذرتی ہے تو اب ظاہر ہے کہ

ف = ۰ . تو اب جو ثبوت لکھیں فقرہ (۴۰۸) میں ف = ۰ . تو حاصل ہوگی ہینر

مساوت ایسی سطح کی جو گذرتی ہی نقطہ شروع میں سے اور چونکہ مساوت سطح کی

دریافت ہوئی تھی جبکہ مقدار ف کی محدود فرض کی گئی تھی اسبواسطے ہم اس خاص

صورت کو علیحدہ ثابت کریں گے اور اس کے ثبوت میں مساوت مذکور کی استقامت

دونوں سادہات اخیر کو اکثر استعمال میں نہیں لاتے ہیں اس لیے سادہات اوپر
 سطح کی جو متوازی سطح لاؤ گے ہو یہ ہی $ع = ۵$ اور اس سطح کی سادہات اوپر
 سطح کی جو متوازی سطح لاؤ گے ہو یہ ہوگی $لا = ۵$ اور اس سطح کی متوازی سطح
 ہو یہ ہوگی $ک = ۵$ اور سادہات میں سطح متقاطع علی القوائیم کی مثلاً سطح لاؤ
 ہو یہ ہوگی $ع = ۵$ اور $لا = ۵$ اور $ک = ۵$ یا اختصاراً اس طرح تعبیر کی جائے گی

(۳۱۶) خطوط بس اور پ د اور دس جس جابی سطح مفروض تقاطع کرتی
 ہی سطوح متقاطع علی القوائیم سی نقوش سطح مفروض کے کہلاتی ہیں سوائے
 ان نقوش کی دریافت ہو سکتی ہیں بوسیلہ فرض کرنے خاص قیمت لا اور ک
 اور ع کے جوہ حاصل کرتی ہیں جبکہ سطح مفروض قطع کرتی ہی سطوح متقاطع
 القوائیم کو۔ فرض کرو کہ سادہات سطح مفروض کی یہ ہی $م = لا + ن + ۵ = ع = ۱$
 تو ظاہر ہی کہ سادہات میں خط بس کی یہ ہوگی $ع = ۵$ اور $م = لا + ن + ۵ = ۱$
 اس طرح سی سادہات میں نقوش پ د اور دس کی یہ ہوگی

$$ک = ۵ \text{ اور } م = لا + ۵ = ع = ۱$$

$$لا = ۵ \text{ اور } ن = ک + ۵ = ع = ۱$$

بیان استعمال سطح کا

(۳۱۷) دریافت کرو سادہات ایک سطح کی جو متوازی ایک سطح مفروض کی ہے
 فرض کرو کہ سادہات سطح مفروض کی یہ ہی $م = لا + ن + ۵ = ع = ۱$ اور سطح

مطلوب کی یہی م لا + ن د + ہ ع = ا جو کہ سطوح متوازی ہیں تو ظاہر ہے کہ نقش انکی یہی سطوح تقاطع علی القوایم پر متوازی ہوگی اب ظاہر ہے کہ نقش انکی سطح لآع پر م لا + ہ ع = ا اور م لا + ہ ع = ا : ہ ع = ہ ع یا م = ہ ع اسپورسی ن = ہ ع یہاں سی ثابت ہوا کہ سادہ مطلوب یہی ہ ع لا + ہ ع = ا یعنی م لا + ن د + ہ ع = ا ہے ظاہر ہے کہ اس سادہ مقدار ہ ع مجہول ہی اور اس معلوم ہونا ہی کہ لا نہایت سطوح متوازی ایک سطح مفروض کہہ سکتے ہیں اور یہ موافق تخریر اقلیدس کے بھی صحیح ہی اور ظاہر ہے کہ یہاں تین شرطیں معلوم ہیں کیونکہ تین نقش ایک سطح متوازی دوسری سطح کی تین نقش کی ہیں اور اگر نقش دوسری سطح بر سطح تقاطع علی القوایم سی متوازی ہوں تو تیسری سطح پر ہی متوازی ہوگی گو اسطرح کہ ہ ع = ہ ع اور ہ ع = ہ ع یا م لا + ن د = ا متوازی اسکی ہی م لا + ن د = ا پس یہاں سی معلوم ہوا کہ دو شرطیں دی گئی ہیں واسطے معلوم کرنے تین مقدار مقررہ کے

(۴۱۸) دریافت کرو سادہ ایک سطح کی جو متوازی ایک سطح مفروض کی ہو اور نقطہ مفروض (لا اور د اور ع) میں سے کدزی فرض کرو کہ سادہ سطح مطلوب کی یہی م لا + ن د + ہ ع = ا اور چونکہ سطح نقطہ مفروض (لا اور د اور ع) میں کدزی ہی تو صورت سادہ گذشتہ کی

یہ ہو جاوے گی م (۱۷-۱۵) + ن (۱۵-۱۴) + ہ (۱۴-۱۳) = ۰

اور یہ شرطیں بھی حاصل ہو گئی $\frac{۱۳}{۵} = \frac{۱۴}{۶}$ اور $\frac{۱۴}{۶} = \frac{۱۵}{۷}$

∴ $\frac{۱۳}{۵} = \frac{۱۴}{۶} + \frac{۱۵}{۷} + ہ (۱۵-۱۴) + ن (۱۴-۱۳) + ہ (۱۳-۱۲) = ۰$

یا م (۱۷-۱۵) + ن (۱۵-۱۴) + ہ (۱۴-۱۳) = ۰

(۱۹) دریافت کرو نقطہ تقاطع ایک خط مستقیم در ایک سطح کا

فرض کرو کہ م لا + ن د + ہ ع = ۱ سادہ ایک سطح مفروض کی ہے

اور لا = ط + د { سادہ تین ایک خط کی ہیں
اور د = ح + ع

اور چونکہ او تار نقطہ تقاطع کے مشترک ہوتی ہیں یعنی جو او تار کر اس نقطہ پر خط

کی ہو گئی دہی اس نقطہ پر سطح کی ہو گئی ∴ م (ط + د) + ن (ح + ع + ص)

+ ہ ع = ۱ ∴ ع = $\frac{۱-م-ن}{ط+ح+د}$ اور لا = ط + د +

$\frac{ط-ن-م}{ط+ح+د}$ اور د = ح + ع + ص =

$\frac{۲-م-ن}{ط+ح+د}$ اور ان مساواتوں سے نقطہ تقاطع معلوم ہو جاوے گا

(۲۰) دریافت کرو ایسی شرطیں موافق جسکے ایک خط مستقیم اور ایک سطح

متوازی منطبق ہو جاوے۔ اگر وہ متوازی ایک دوسری کی ہیں تو ظاہر

ہی کہ قیمتیں لا اور د اور ع کی لا نہایت ہو گئی ∴ م ط + ن ح + ہ ع = ۰

اور اگر وہ منطبق ہو گئی تو قیمتیں لا اور د اور ع کی غیر منقطع ہو گئی یا

ہر دواصہ = ۰ ∴ م ط + ن ح + ہ ع = ۰ اور ا-م-ن-ص = ۰

اور یہ دو شرطیں اس صورت میں صادق آویں گی جبکہ سطح اور خط منطبق ایک دوسری پر ہو گئی اور شمار کنندہ لا اور د کی بوسیله مساواتوں کے شدت کے ہر ذراعہ = حاصل ہو گئی یہاں سے ثابت ہوا کہ دہرے دریافت کرنی ایک سطح کے جو ایک خط پر منطبق ہو یہ شرطیں پیدا ہو گئی م + د + ن ص = ۱ اور م + ط + ن + ح = ۰ ان دونوں مساواتوں سے یہ حاصل ہوا کہ

$$م - \frac{م + ط + ن + ح}{د - ح} = - \frac{د + ط}{د - ح} \text{ اور } ن = - \frac{د + ط}{د - ح} \text{ تو اب ط پر ہی مساوات}$$

$$\text{سطح کی یہ ہو گئی } (م + ح) + (د + ط) - (د + ط) = (د - ح) + (د - ح) = ۰$$

د - ح = ص د اور اس مساوات میں د غیر منقطع ہے ۔

(۴۲۱) دریافت کرو مساوات ایک سطح کی جو منطبق ہو دو خط مفروضہ پر

فرض کرو کہ مساوات سطح کی یہ ہو م + لا + ن + د + ح = ۱ اور مساواتیں

$$\left\{ \begin{array}{l} لا = ط + د \\ ح = د + ص \end{array} \right. \text{ اور } \left\{ \begin{array}{l} لا = ط + د \\ ح = د + ص \end{array} \right. \text{ اور شرطیں}$$

اس سطح کی جو منطبق ہو خطوط مفروضہ پر یہ ہو گئی م + د + ن ص = ۱ (۱)

اور م + د + ن ص = ۱ (۲)

$$\text{اور } م + ط + ن + ح = ۰ = ۰ (۳)$$

م + ط + ن + ح = ۰ = ۰ (۴) مساوات (۱) اور (۲) قسٹین

م اور ن کی حاصل ہو گئی اور جبکہ لکھیں ان قیمتوں م اور ن کو مساواتوں (۳) اور (۴) میں تو دو قیمتیں د کی حاصل ہو گئی اور اب مساوات آئندہ حاصل ہو گئی

(ح-ج) (د-د) + (ط-ط) (ص-ص) = ۰ اور شرط اس مساوت

کی پوری ہوگی جبکہ خطوط متوازی ہوگی (اور اس صورت میں $\tau = \tau$ اور $\tau = \tau$)
 یا جبکہ وہ ملائی ہوگی یہاں یہی معلوم ہوا کہ ایک سطح کبھی کبھی ہر دو صورتوں میں
 طرچہ کردہ منطبق ہو دو خط معلوم پر۔ جبکہ گلبین قمتوں میں اور ان اور

کو تو مساوت سطح کی یہ حاصل ہوگی (ص-ص) لا- (د-ط) د +

ل (د-د) ح + (ص-ص) ط { ع = دص - دص

(۴۲۲) دریافت کرد مساوت ایک سطح کی جو منطبق ہو ایک خط پر اور متوازی
 دوسری خط کی ہو اب ظاہر ہے کہ موافق شرط سوال کے تین مساواتیں آئندہ حاصل

ہوگی $m + n + v = 0$ جبکہ سطح ایک خط پر منطبق ہو
 $m + n + v = 0 + 0 + 0 = 0$

اور $m + n + v = 0 + 0 + 0 = 0$ جبکہ سطح مطلوب متوازی دوسری خط کی ہو

اور بوسیدان تینوں مساواتوں کے مفادیرم اور ان اور دریافت ہوگئی ہیں

اور جبکہ گلبین ان قمتوں کو سطح کی مساوت عام میں تو ہمیں مساوت سطوح حاصل ہوگی

(۴۲۳) دریافت کرد تقاطع دو سطح معلوم کا فرض کرد کہ مساواتیں دو سطح کی

یہ ہیں $m + n + v = 0$ اور $m + n + v = 0$ جبکہ

دو کرپن ع کو بوسیدان دو مساوت کی تو حاصل ہوگی ایک ایسی مساوت

جس میں مفادیر ل اور د کی باقی باقی ہیں اور یہ مساوت تعلق رکھی گی

اوس تقاطع دو سطح میں جگہ نشان سطح ل اور پر ہے اور مساوت اس کی یہ ہوگی

(م-م-ہ) لا + (ن-ہ-ن) = س-ہ-ہ اور اسطرسی ہیم
 (م-ن-م) لا + (ہ-ن-ہ) = ع-ن-ن سادات اور خط
 نشان کی سطح لاء پڑ جو تقاطع کرنے دو سطح کی سی پیدا ہو اسی اور چونکہ سادات
 ایک خط نشان کی دو سطح متقاطع علی القوایم پر ساداتین خط مطلوب کی ہوتی ہیں
 تو اب ثابت ہوا کہ ساداتین گذشتہ ساداتین اور خط کی ہیں جو تقاطع کرنی
 دو سطح کی سی پیدا ہوتا ہی اور تیسرا خط نشان بوسیلہ دو باقی خط نشان کے
 معلوم ہو سکتا ہی اور وہ علیحدہ بغیر انکی استغانت کی بھی دریافت ہو سکتا ہی
 سادات اور سکی ہیم ہوگی (ن-م-ن) + (م-م-ہ) = ع-م-م
 (۴۲۴) دریافت کرد تقاطع تین سطح کا یعنی وہ نقطہ جو تقاطع کرنی تین
 سطح کی سی پیدا ہوگا فرض کرد کہ ساداتین اور خط کی جو تقاطع کرنی سطح
 اول اور دوم سی پیدا ہوگا موافق فقرہ گذشتہ کے لا = ط + ع + د
 اور س = م + ع + ص

اور فرض کرد کہ فصل شدہ سطح اول اور سیوم کا سادات آئندہ سی تعبیر
 ہوتا ہی لا = ط + ع + د
 س = م + ع + ص
 اب ظاہر ہی کہ بوسیلہ دریافت کرنی تقاطع
 ان دو خط کی بوسیلہ چار ساداتوں گذشتہ کے مبین حاصل ہوگی قیمتین لا اور
 کہ اور ع اور ہیم موافق نقطہ تقاطع دو خط کی ہوگی اور ظاہر ہی کہ یہ نقطہ فی
 الحقیقت نقطہ تقاطع تین سطح مفروض کا ہوگا۔ اسطر سے دریافت ہو سکتی ہے

نسبت در میان امثال کی سطح کے جو قطعی ہیں ایک نقطہ پر

(۴۲۵) دریافت کرد نسبت در میان امثال مساواتوں چار سطح کے جبکہ وہ ہیں
ایک خط مستقیم پر۔ فرض کرد کہ مساواتیں سطح مفروض کی یہ ہیں

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ = ۴$$

تو اب ظاہری کہ سطح اول اور دوم تقاطع کر یکنی ایک خط پر جس کی مساواتیں یہ ہو گئی

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور تیسرے سی حاصل ہو گئی یہ مساواتیں

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور سطح اول اور چوتھی تقاطع کر یکنی ایک خط پر جس کی مساواتیں

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اب ظاہری کہ جب یہ خطوط منطبق ہوں ایک دوسرے

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱$$

۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور تیسرین ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱

اور ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + ۱ وغیرہ میں معلوم ہو سکتی ہیں بوسیلہ فقرہ (۴۲۳) کی تو اب ظاہری کہ نسبت
در میان امثال کی دریافت ہو گئی ہے یہی نسبت در میان امثال کی سطح کے مساواتیں

کی ہوگی جبکہ وہ ایک نقطہ پر ملین - ٹ ٹ ٹ ٹ
 (۴۲۶) دریافت کرو نسبت در میان اشال مساوت ایک خط اور ایک سطح کی جبکہ
 دعوہ و ایک دوسری پر ہون فرض کرد کہ (لا اور ۱ اور ۱) اور اوتار نقطہ
 کی ہیں جہاں کہ سطح اور خط متی ہیں تو اب ظاہر ہے کہ مساوت سطح کی یہ ہوگی
 م (لا - لا) + ن (س - س) + ۵ (ع - ع) = ۰ (۱) اور مساواتین

خط کی یہ ہوگی لا = ط + د + (۲)
 اور فرض کرو کہ مساواتین ایک

خط کی جو عمو (۲) پر اور نقطہ (لا اور ۱ اور ۱) میں جو (۲) میں گذرتا ہے

یہ ہیں لا - لا = ط (ع - ع) (۳)
 اور جو کہ یہ خطوط عمو و ایک دوسرے
 س - س = ح (ع - ع)

پر ہیں اس واسطی جیب التمام اس زاویہ کا جو در میان انکی واقع ہے = ۰

ط + ط + ح + ح = ۱ = ۰ موافق فقرہ (۴۰۲) کی اب ظاہر ہے کہ بوسیلہ اس

مساوت اور مساوت (۳) کے ہم نسبت در میان اوتار لا اور ۱ اور ۱ کے

دریافت ہو جا دیکھ اور اس سے معلوم ہوتا ہے کہ وہ نقطہ جسی یہ اوتار تعلق رکھتی

ہیں اس خط میں سی جو عمو خط معلوم پر ہی تہا نسی معلوم ہوتا ہے کہ اگر لکھیں

قیمتین ط اور ح کی مساوت گذشتہ میں تو ہمکو حاصل ہوگی ایک مساوت ایسی

سطح کی جو لو کس نام اون خطوط کا ہی جو عمو (۲) پر ہیں اور وہ یہ مساوت ہے

$$\text{ط} = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{ع} - \text{ع}} + \frac{\text{س} - \text{س}}{\text{ع} - \text{ع}} + ۱ = ۰$$

یا

ط (۱۱-۱۱) + ح (۱۵-۱۴) + (۱۴-۱۴) = ۰ (۴) اور چونکہ
لوکس سادات (۴) کا لوکس (۲) پر منطبق ہونا چاہئے اس لیے جبکہ کہیں اشغال
دونوں ساداتوں کی مساوی ایک دوسری کی توجہ حاصل ہوگا یہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

اور $\frac{1}{2} = 1$ اور یہی شرطیں مطلوب ہیں۔

(۲۷) یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ اگر خط معلوم ہو تو مساوت اور سطح کی عمود
اسپر ہی یہ ہوگی $۵ = ۷ + ۲ = ۹$ اور اگر سطح معلوم ہو تو مساواتین
خط کی جو عمود اسپر ہی یہ ہوگی $۱۱ = ۷ + ۴ = ۱۱$ اور $۵ = ۲ + ۳ = ۵$
صورت مساوت سطح اور خط سی معلوم ہوتا ہے کہ نقش سطح کا عمود خط مذکور کی
اوس خط نشان پر جو اوس سطح متقاطع علی القوایم پر کیجا گیا ہے

(۴۲۸) اگر سطح نقطہ (لا، لا، اور ۱، اور ع، ۱) میں سے کدڑی اور عمود اس خط معلوم پر جو حکمی مساوات میں یہ ہیں (لا = ط ج + د اور ۱ = م ع + صا) تو مساوت سطح منور کی یہ ہوگی ط (لا - لا، ۱) + م (۱ - ۱، ۱) + ع - ع = ۱ = ۰

(۴۲۹) اگر خط مستقیم ایک نقطہ معلوم میں سے کدڑی اور عمود اس سطح پر ہو (م لا + ن ۱ + د ع = ۱) تو مساوات میں اس خط کی یہ ہوگئی

• $(1.8 - 1) \frac{1}{0} = 8 - 8$ اور $(1.8 - 1) \frac{1}{0} = 18 - 18$

(۴۳۰) دریافت کرد طول ایک عمود کا جو کھینچا جاے ایک نقطہ معلوم سے سطح معلوم

فرض کر دکھ (لا، اور ۱، اور ۱) اور نقطہ معلوم کی جڑ اور

$m + n + k = 1$ مساوت سطح معلوم کی ہے فقرہ (۳۱) میں ثابت

ہو ہی کہ اگر ت طول اس عمود کا ہو جو پہا جاد نقطہ شروع سی اس سطح پر کی

سادت یہی م لا + ن + س + ع = ۱ توف $\sqrt{م^۲ + ن^۲ + س^۲ + ع^۲}$ اور

ہی کہ سادت اس سطح کی جو متوازی سطح معلوم کی ہی اور نقطہ مفروض میں سے گزرتا

$$۰ = (۱۷ - ۱۱) م + (۱۵ - ۵) ن + (۱۷ - ۱۱) س + (۱۷ - ۱۱) ع$$

اسیو سطحی فاصلہ نقطہ شروع کا اس سطح سی یہ ہوگا

$$۱ = \frac{۱۷ م + ۱۵ ن + ۱۷ س + ۱۷ ع}{\sqrt{م^۲ + ن^۲ + س^۲ + ع^۲}}$$

معلوم سی یہی سی = ف - ف = $\sqrt{م^۲ + ن^۲ + س^۲ + ع^۲}$

(۴۳) دریافت کرد فاصلہ ایک نقطہ کا ایک خط مفروض سی فرض کرد سادت

خط مفروض کی یہی لا = ط + د اور س = م + ع + ص تو اب ظاہری کہ

سادت اس سطح کی جو نقطہ معلوم (لا اور د اور ع) میں سے گزرتی عمود

خط مفروض پر یہی ط (لا - لا) + م (س - س) + ع (ع - ع) = ۰ اور اب

$$\frac{۱۷ م + ۱۵ ن + ۱۷ س + ۱۷ ع}{\sqrt{م^۲ + ن^۲ + س^۲ + ع^۲}} = ۰$$

فرض کرد کہ یہ کہ = $\frac{۱۷ م + ۱۵ ن + ۱۷ س + ۱۷ ع}{\sqrt{م^۲ + ن^۲ + س^۲ + ع^۲}}$ اور لا = ط + د اور

س = م + ص + یہ اتار اس نقطہ تقاطع کی بین جو پیدا ہو اسی تقاطع کرنے

خط معلوم اور سطح کی سی جو گزرتی ہی نقطہ معلوم میں سے اور عمود مطلوب (ک) فاصلہ

نقطہ معلوم کا اس نقطہ تقاطع ہی اسیو سطحی ک = $(۱۷ - لا) م + (۱۵ - لا) ن + (۱۷ - لا) س + (۱۷ - لا) ع$

+ (ع - ع) = $(۱۷ - لا) م + (۱۵ - لا) ن + (۱۷ - لا) س + (۱۷ - لا) ع$

اور صورت اس سادت کی بعد مجذور لینی اور اخصار کی یہ حاصل ہوگی

$$ک^۲ = (لا - د)^۲ + (ک - ص)^۲ + ع^۲ - \frac{ب^۲}{ن^۲}$$

(۳۲) اگر نقطہ معلوم نقطہ شروع فرض کیا جاوے تو لا اور د اور ص اور ع

$$\text{ہر واحد} = ۰ \text{۔ نیز } ک^۲ = د^۲ + ص^۲ - \frac{(ط + د + م ص)^۲}{۲م^۲ + ۲ط + ۱}$$

(۳۳) دریافت کرو زاویہ رجو درمیان دو سطح معلوم کی واقع ہی - فرض

$$\text{کر دو کہ مساواتین سطح معلوم کی یہ ہیں } م + لا + ن + د + ع = ۱ \quad (۱)$$

$$م + لا + ن + د + ع = ۱ \quad (۲)$$

اگر کہیں ہم عمود نقطہ شروع سے ہر ایک سطح پر سطح معلوم سی تو خطا ہر سی کہ زاویہ درمیان ان دو عمودوں کے مساوی اوس زاویہ کی ہوگا جو مابین سطح معلوم کے

$$\text{واقع ہی فرض کر دو کہ مساواتین ان خطوں کی یہ ہیں } لا = ط = ع \quad (۳) \quad \begin{cases} لا = ط = ع \\ ع = د \end{cases}$$

(۴) واسطی اسبات کی کہ (۳) عمود (۱) پر ہو جاوے

بلکہ یہ فرض کرنا چاہیے $ط = \frac{۱}{۵}$ اور $د = \frac{۱}{۵}$ موافق فقرہ (۳۶) کے

اور اسطرح $ط = \frac{۱}{۵}$ اور $د = \frac{۱}{۵}$ تو اب خطا ہر سی کہ زاویہ درمیان

عمود م کو ر کی یعنی زاویہ جو مابین سطح کے واقع ہی صورت آئندہ سی معلوم ہو جائے

$$\text{جمہ} = \frac{۱ + ۲ط + ۲د + ۱}{(۲ط + ۲د + ۱) م + (۲ط + ۲د + ۱) ن} \quad (۳۰۳) \text{ اسطرحی}$$

$$\text{جمہ} = \frac{۱ + ۲ط + ۲د + ۱}{۱۰ + ۱۰ + ۱۰ + ۱۰} = \frac{۱ + ۲ط + ۲د + ۱}{۴۰}$$

(۳۴) واضح ہو کہ ہم اس قیمت کو ایک اور صورت میں پسید (۳۴) کے

لکھ سکتے ہیں اور وہ یہ ہے جمہ = $\frac{۱ + ۲ط + ۲د + ۱}{۴۰}$ جمہ = $\frac{۱ + ۲ط + ۲د + ۱}{۴۰}$ جمہ = $\frac{۱ + ۲ط + ۲د + ۱}{۴۰}$

یا جمر = جہم ک د ع + جہم ک ل ا ع + جہم ک ل ا د جہم ک ل ا د

(۴۳۵) اگر سطوح مفروض عمود ایک دوسری پر ہوں تو طو ہر ہی کہ

جمر = ۰ :: م ۱۲ + ن ۱ + ل ۱۵۵ = ۰ تو اب یہاں سی معلوم ہوگا کہ اگر

سادات کسی سطح کی یہ ہو م ل + ن ۵ + د ۵ = ۱ تو مساوات اوس

سطح کی جو عمود اس پر ہی یہ ہوگی م ل + ن ۱۵ - ۱۲ + ن ۱۵ = ۱

اور اس میں دو مقدار مقررہ غیر منقطع ہیں —

(۴۳۶) اگر سطوح مفروض متوازی ہوں تو جمر = ۱ تو اب اگر لکھیں جمر

کی مساوی لہ ٹو = اکی تو آخر کو یہ حاصل ہوگا $\frac{۱}{۱۵} = \frac{۱}{۱۵}$ اور $\frac{۱}{۱۵} = \frac{۱}{۱۵}$

اور یہ دسی نتیجہ ہی جو ہم نے ابھی متوازی سطوح میں حاصل کیا ہے

(۴۳۷) دریافت کرو ایک زاویہ جو درمیان ایک خط مستقیم اور ایک سطح

واقع ہی طو ہر ہی کہ یہ زاویہ مساوی اوس زاویہ کی ہے جو کہ یہی خط بناتا ہی

سطح ثانی سطح مذکور کی سہی اب اگر کہیں ایک عمود کسی نقطہ خط مفروض سے

سطح مفروض پر تو زاویہ مطلوب تمامی اوس زاویہ کا ہوگا جو عمود مذکور خط مفروض

سہی بناتا ہی فرض کرو کہ مساواتین سطح اور خط کی یہ ہیں م ل + ن ۵ + د ۵ = ۱

اور ل = ط ع + د اور د = ج ع + ص اور مساواتین اوس عمود کی

جو کہیں چاہے اس نقطہ (لا اور د اور ع) سہی جو خط مفروض میں واقع ہی سطح

معلوم پر یہ ہوگی ل = $\frac{۵}{۱۵}$ (ع - ۱۵) اور د = $\frac{۱۵}{۱۵}$ (ع - ۱۵)

موافق (۴۳۹) کے :: جمر = (ع - ۱۵) = جمر =

—

جو ہر ایک نصف اپنی سطح میں محور سے بنائے نامی اور مفادیر د اور ص د ہی میں جو صورت محور متقاطع علی القوایم میں ثابت ہوئی ہتین اسوے وہ شکلین خط مستقیم کی محور دن کی زاویہ پر موقوف ہتین میں اس صورت میں اسوے سے ثابت ہوئی جیسی محور متقاطع علی القوایم کی صورت میں ثابت ہوئی ہتین -

(۴۴۲) دریافت کرو ز او یہ در میان دو خط مستقیم کی جیکہ محور ترجیحی فرض کی جاوے
ہم اسجای او پس ترکیب کو عمل میں لادیں گی جو فقرہ (۴۴۲) میں لکھی گئی تھی فرض کرو کہ
مسادیتین اون خطوط کے جو کہیں جاوےں تنواری خطوط مفروض کے گذرنے کی ہو کسی نقطہ

فرض کرو کہ - فاصلہ ایک نقطہ (لا اور د اور ع) (۱) کا نقطہ شروع ہے ہی اور کہ -
 فاصلہ نقطہ (لا اور د اور ع) (۱) کا نقطہ شروع ہے ہی اب اگر ت فاصلہ
 درمیان ان نقاط کی فرض کیا جاوے اور زاویہ مطلوب تو $\alpha + \beta =$ -

$$(u-u)r + r(1\varepsilon - \varepsilon) + r(1s - s) + r(1u - u) = 0 \text{ für } r, r$$

$$(15-s)r + 14s \quad (14-e)(10-u)r + 10s$$

$$(1, 2, 2 + 1, 3, 3 + 1, 4, 4) \rightarrow 1^2 + 2^2 = 5 \text{ جم } (1, 2 - 2)$$

$$+ \sum_{u,v} (u, e + e, u) + \sum_{u,v} (u, s + s, u) \} r -$$

$$1, \text{عع} + 1, \text{سس} + 1, \text{וו} = 0 \text{ جم } \therefore \{ \text{عج} (1, \text{ع} + 1, \text{س}) \}$$

[illegible]

(۴۴۴) دریافت کرد و شرطین جنکی موافق ایک خط مستقیم عمود ایک سطح پر ہو
 اور یہ شرطین اسی طرح سے دریافت ہوئی جسبی فقرہ (۴۲۶) میں بیان کی
 گئی ہیں ساتھ ایک سطح کی جو کدڑی اس نقطہ (لا، اور د، اور ع،) خط عمود
 میں سے یہ ہوگی (لا-لا) + (س-س) + (ع-ع) = ۰ اور ساتھ
 خط مفروض کی یہ ہوگی لا = ط + د اور س = م + ع + ص اور ساتھ
 اس سطح کی جو عمود اس خط پر ہی فقرہ گذشتہ میں لکھی ہوئی ہے اور جبکہ
 اشال مساوی قوای مقدار مچول کو بار بار ایک دوسری کے توسط حاصل ہو گیا ہے
 س = ط + م جم لا + س جم لا + ع اور ن = م + ط جم لا + س جم لا + ع
 ہ = ا + ط جم لا + ع + م جم لا + ع ان مساواتوں سے قیمتیں س اور
 ن اور ہ کی یافتیں ط اور م کی اجزایں س اور ن اور ہ میں دریافت
 ہو جائیگی۔

(۴۴۵) دریافت کرو زاویہ درمیان ایک سطح اور خط مستقیم کے۔ فرض کرو
 کہ مساواتیں سطح اور خط کی یہ ہیں م لا + ن س + ع ہ = ۱ (۱)

لا = ط + ع + د
 س = م + ع + ص (۲) اور فرض کرو کہ مساواتیں اس خط کی جو عمود سطح
 مفروض پر ہی یہ ہیں لا = ط + ع + د
 س = م + ع + ص (۳) مقدار ط اور م اجزایں
 ط اور م میں بوسیله فقرہ گذشتہ کی معلوم ہو جاوے گی اور زاویہ درمیان

پچیسرہ
(۲) اور (۳) کی بوسیدہ فقرہ (۴۴۲) کی معلوم ہو جاوے گی اور چونکہ زاویہ جو واقع ہو درمیان سطح اور (۱) کے تمامی اوس زاویہ کی ہی جو درمیان (۲) اور (۳) کے واقع ہو اسی واسطے یہ زاویہ ہی باسانی تمام معلوم ہو جاوے گا۔
(۴۴۶) دریافت کرو وہ زاویہ جو واقع ہو درمیان دو سطح کے۔

ساداتین اوں خطوط کی جو عمود سطح مفروض پر ہیں اور نقطہ شروع میں سے گذرتی ہیں بوسیدہ (۴۴۲) کے معلوم ہو جاوے گی اور زاویہ درمیان ان خطوط کے جو فی الحقیقت زاویہ سطوح مفروض کا ہی فقرہ (۴۴۲) اسی درپشت ہو جاوے گا۔

باب چہم

تبدیلی اوتار کے بیان میں

(۴۴۷) تبدیل کرو ایک مسادات کو جبکہ نقطہ شروع آہے اوس مسادات نی جبکہ نقطہ شروع آہے محور صورت اخیر کے متوازی صورت اول کے محور کی ہیں اگر اوتار نی نقطہ شروع کی ط اور ص اور س فرض کئے جاوے تو ظہر ہے کہ اوتار ایک نقطہ کی لمبا ط نی نقطہ شروع کے سادی اصلی اوتار سے اوتار نقطہ شروع کے ہو گئی یہاں سے معلوم ہوا کہ اگر لا اور د اور ع اصلی اوتار ایک نقطہ کے ہوں اور لا اور د اور ع نی اوتار نقطہ محور کی فرض کی جاوے تو لا = ط + لا اور د = ص + د اور ع = س + ع اگر لکھیں ہم ان قسمیوں لا اور د اور ع کو ایک سطح کی مسادات میں تو مسادات اوسکی اجزای لا اور د اور ع میں لمبا ط نقطہ شروع آہے کے معلوم ہو جاوے گی

$$۱ = لا جم لا اول + ک جم لا اول + ع جم ع اول$$

$$۵ = لا جم لا اول + ک جم لا اول + ع جم ع اول$$

$$ع = لا جم لا اول + ک جم لا اول + ع جم ع اول$$

$$یا لا = م لا + م لا + ع ۲۳$$

$$ک = ن لا + ن لا + ع ۲۴$$

$$ع = لا ۵ + ک ۱۵ + ع ۲۵$$

ان مساواتوں میں م بجای جم لا اول

لکھا گیا ہے وغیرہ۔ اور فقرہ (۳۹۷) سے حاصل ہو گئی مساواتیں آئیدہ
اون زاویوں کے اجزاء میں جو آلا بنانا ہی محور لا اور ک اور ع سے

$$= (جم لا اول) + (جم لا اول) + (جم لا اول) = ۱ اور اب یہاں سے حاصل ہو گئی$$

$$\begin{cases} مساواتیں آئیدہ \\ م + ن + ۲ = ۱ \\ م + ن + ۲ = ۱ \\ م + ن + ۲ = ۱ \end{cases} \quad (۲)$$

(۳۹۷) اگر کسی محور متقاطع علی القوائیم فرض کی جاوے تو ہمیں مساواتیں آئیدہ

موافق فقرہ (۴۰۵) کی حاصل ہو گئی اور ان سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی محور عمود ایک

$$\begin{cases} دوسری پر مبنی اور وہ یہ م + ن + ۱ = ۱۵۵ \\ مساواتیں ہیں م + ن + ۲ = ۲۵۵ \\ م + ن + ۲ = ۲۵۵ \end{cases} \quad (۳)$$

یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ نوجیب التمام میں سے جو (۱) میں میں تین جیب التمام
(۲) سی اور (۳) سی دریافت ہو جاوے گی۔ اور تین باقی غیر منقطع رہیں گی
یعنی تین زاویہ ایسی ہوگی کہ اوکلی قیمت جو جاہل فرض کر سکتے ہیں۔
(۴۵۰) بجای مساواتوں گذشتہ کے مساواتیں آئندہ کام میں آسکتی ہیں

$$\begin{cases} \text{لا} = \text{م} + \text{لا} + \text{ن} + \text{و} + \text{ع} \\ \text{و} = \text{م} + \text{لا} + \text{ن} + \text{و} + \text{ع} \\ \text{ع} = \text{م} + \text{لا} + \text{ن} + \text{و} + \text{ع} \end{cases} \quad (۵) \quad \begin{cases} \text{م} + \text{م} + \text{م} = ۱ \\ \text{ن} + \text{ن} + \text{ن} = ۱ \\ \text{و} + \text{و} + \text{و} = ۱ \end{cases}$$

$$(۶) \quad \begin{cases} \text{م} + \text{ن} + \text{و} = ۰ \\ \text{م} + \text{ن} + \text{و} = ۰ \\ \text{م} + \text{ن} + \text{و} = ۰ \end{cases}$$

اب اگر ضرب کریں قیمتوں لا اور و

اور ع کو جو (۱) میں ہیں اور ن اور و سی علیحدہ علیحدہ یعنی لا کو م
اور و کو ن سے اور ع کو و سی اور بعد اسکی جمع کر کے مختصر کریں ان مساواتوں

بوسیله (۲) اور (۳) کے تو ہمیں حاصل ہوگا یہ لا = م + لا + ن + و + ع

اور اگر اسطرحی عمل کریں بعد ضرب دینی کے مقادیر م، ن، و اور

م، ن، و اور و میں تو ہمیں تمام مساواتیں (۴) کی حاصل ہوگی اور چونکہ

فاصلہ کا نقطہ شروع سے ایک ہی طرف ہر سر کے لا + و + ع = لا

+ و + ع اگر کہیں قیمتیں لا اور و اور ع کے جو (۲) میں ہیں اور

کہیں انساں مساوی قوای دو طرف مساوت کو برابر ایک

۳۸
جو واسطی تبدیل اوتار کے لکھی گئے ہیں تو

$$u = u_{m,1} + u_{m,2} + u_{m,3}$$

$$\dot{e}_{\mu\nu\mu\nu} + \dot{s}_{1\nu 1\nu} + \dot{v}_{\nu\nu} = s$$

اور پکی نوزادیہ کی جو (۱) مین

جہتقا دیر ط اور ط م اور ح اور ح م لکھی گئے ہیں

واضح ہو کہ سچائی الٰہ و اتون کے ہم ایسا داتین حاصل کر سکتے ہیں حسین
صرف بانچ مقدار پر مقررہ باہی جادینی مکر یہ سب غیر شقطع ہوئی اور یہ بوسیلہ
استعمال کرنے ترکیب آئندہ کے حاصل ہوئی فرض کرو کہ زاد یہ مجسمہ جو بیدار ہو گا
سطوح متقاطع علی القوائیم سے حرکت کرتا ہو اگر دلفظہ شروع کے ایک ہی مقام
برآمد اس فرض سے دعویٰ مکر کو ثابت کرتے ہیں اور بخن اس ترکیب کی لرگن جہا
نی بہ تفصیل لکھی ہے

(۴۵۳) مرقومہ بالا سے معلوم ہوتا ہے کہ صرف تین مہزاروں کی ایک مساوت میں ضرورت ہوتی ہے اور سیو اے حاصل کر سکتے ہیں ایک ایسی صورت واسطی تبدیل کرنے اور تار کی جسمیں تین زاویہ ہو سکتی ایسی صورتیں یو آر جی بی دریافت کی ہیں اور چونکہ بہت مغربہ ہیں سیو اے ہم انکو اس جابی بیان کر سکتے - فرض کرو کہ اس

فصل مشترک اعلی سطح لاء اور نئی سطح لاء کامی اور فرض کردہ سطح سے لاء اور
 اور سطح سے لاء کے واقعہ اور فرض کردہ سطح کاغذ کی تعبیر کرتی ہے سطح اخیر کو
 بناؤ ایک گڑھ جس کا مرکز آ اور قطر عدد ایک ہی اور مان لو کہ یہ قطع کرنا ہی محور و

$\Delta = \Delta$ (جم جس ۲ جس ۲ + جم ۲ جس ۲) + د (جم جس ۲ جس ۲ - جس ۲ جس ۲)
 - ع جس جس ۲ = د (جم جس ۲ جس ۲ - جم ۲ جس ۲) + ع (جم جس ۲ جس ۲ - جس ۲ جس ۲)
 + جس ۲ جس ۲ - ع جس جس ۲ = ع (جم جس ۲ جس ۲ + د جس جس ۲ + ع جس ۲ جس ۲)
 اور ان صورتوں کو لاپلاس صاب فی بی ایک اور طرحی ثابت کیا ہی اور یہ صورتیں
 اکثر کتب انگریزی میں جو ریاضی کے باب میں لکھی گئی ہیں بائیس جادو کی نگر ایک تھوڑی
 تبدیلی علامت جبرئیلہ اخیر امین ہوگی اور یہ خوف ہر مختلف مقامات ۱ سے ۲

بیان تقاطع سطح منحنی اور سطح مستوی کا

(۲۵۴) مساواتیں برنومہ بالا بہت فائدہ مند دریافت کرنے میں خاصیت
 تقاطع سطح منحنی اور سطح مستوی کے ہو گئی اگر ہم جابین قطع کرنا کسی ایک سطح منحنی
 کا مثلاً فرض کر دے سطح مخروط کا بوسیلا ایک سطح مستوی کی تو دوسری اس مطلب کے ہمیں
 لازم ہی کہ دو کرکین ع کو مساواتوں سطح منحنی اور سطح مستوی میں سے مگر ایسی
 ایک مساوت اولی تقاطع کے نشان کی سطح لاء بر حاصل ہوگی اور ہمیں مساوت اولی
 تقاطع کی دریافت کرنے منظور ہی اور یہ اس سے حاصل ہونی محال اور چونکہ نشان
 دوسری دریافت کرنے خاصیت ایک خط منحنی کے کافی نہیں ہوگا اس لیے مساوت
 دوسری خط منحنی کی جبکہ وہ کہاجا جاوے قطع کرنیوالی سطح مستوی پر دریافت کرنی چاہیے
 اور یہ بوسیلا تبدیل کرنے اوتار کے حاصل ہو سکتا ہی - فرض کر دے سطح مستوی
 قطع کرنیوالی سطح لاء کی ہی اور فرض کر دے کہ اس میں محور لاء ہی تو اب غاہر ہی کہ محور
 سطح کردی کے لاء اور د اور ع امین اور انہیں سے محور لاء اور د قطع کرنیوالی سطح

مین ہین جبکہ لکھین ع = ۰ اور سادوت مین جو موافق اس فرض کے حاصل ہوتی ہے
تو ظاہر ہے کہ اس صورت مین ہین تقاطع یعنی فصل مشنہ کے سطح کردی اور سطح مستوی
لاؤ کا حاصل ہوگا اور یہ تقاطع مطلوب تھا۔ اور چونکہ ہین اس کے صرف ذریعہ کرنا
اوس خط منحنی کا جو تقاطع سے حاصل ہوتا ہے

مطلوب ہے اسیدو اسلی ہم پہلی ع = ۰ فرض کریں گے اور بعد اس کے تبدیل کرینگی ہم سادوت
کو اب فرض کرو ع = ۰ اور زاویہ س اولاً یا ح = ۰ تو اب ظاہر ہے کہ صورت
فقرہ گذشتہ کی یہ ہو جاوگی لا = لاجم ہ + لاجم ہ اور د = - لاجم ہ
+ لاجم ہ اور ع = د حصر یہ سادوت مین بغیر استقامت سادوتون کو
کہا ہی باسانی حاصل ہو سکتی ہین چنانچہ یہ طریقہ واسطے دریافت کرنی سادوتون
بالا کے کتاب فریکر صاحب اور پوٹینٹ کی مین لکھا ہے

(۴۵۵) چونکہ خاص صورتون مین بوسید استعمال کرنے سادوتون مرفومہ بالا کے
بڑی دقت ہوتی ہے اسیدو اسلی ہم ایک خاص ترکیب اس جایی لکھین گے جس سے بڑی
آسانی اور کم محنت تبدیل کرنے مین سادوتون کے ہوگی مثلاً اکثر صورتون مین
ہم فرض کر سکتے ہین کہ سطح کا شعاع والی عمود سطح لاء برہم اور یہ ظاہر ہے کہ اس فرض
سے کسی نوع کا فرق عمومیت سادوت مین ہین اوکیا بلکہ وہ آسان ہو جاوگی
کہونکہ اس صورت مین خط اوس خط اوس بر منطبق ہوگا یا جبکہ اوس کو کہیں تو اوس
منطبق ہو جاوگا اور اسیر اسطے ہ = ۰ تو اب ظاہر ہے کہ صورت اون سادوتون
کی جو فقرہ گذشتہ کے اخیر مین لکھے ہوئی ہین یہ ہو جاوگی لا = د + لاجم ہ اور

ہندسہ

اور ۵ = - لا اور ۷ = و جس ر واضح ہو کہ یہ صورتیں بغیر استقامت کی ہی حاصل ہو سکتی ہیں مثلاً شکل گذشتہ میں فرض کرو کہ جب اس اور لا اور و کے معیے جادین تودہ منطبق ایک دوسری برہوتی ہیں اور ۵ = ۹۰ اور ۷ = ۹۰ اور اب مستعمل کرد اصل صورتوں (۱) فقرہ (۴۴۸) کو تو موافق ان فرض کے صورتیں مرقومہ بالا آسانی تمام حاصل ہو گئی۔

(۴۵۶) اگر صورتوں مرقومہ بالا میں نقطہ شروع ہی تبدیل کیا جائے تو پھر یہ کہ زمین بائیں طرف ساد اتون مرقومہ بالا کے مفاد پر ط اور ص اور س کو داخل کرنا چاہیے

باب ششم

بیان کرہ اور اون محترم میں جو گردش سطح منحنی سے پیدا ہوتی ہیں۔

(۴۵۷) اگر بحث کرنی سطح منحنی مثلاً کرہ کی سفور ہو تو ہم اس صورتیں دوسری عمل کریں گی جو سطح مستوی میں کیا تھا یعنی ساد ات او سکی بوسید او سکی جذبہ خواص کے جو کہ معلوم ہیں دریافت کریں گی اور اس عمل سے ہمیں نسبت در بیان میں مقدار اور د اور ع کی دریافت ہو جائیگی اور یہ نسبت اس علامت سے تعبیر ہو سکتی ہے (لا اور د اور ع) = ۰ یا ع = ح (لا اور د) یہ مساوات سطح منحنی کی ایک خاصیت ہے

اور اسی نسبت تمام نقاط او سکی سطح کے تعبیر ہوگی اور یہ ایک ایسی مساوات ہے جو جامع کل یعنی تمام صورتوں سطح منحنی میں صادق آتی ہے اور مانع غیر ہے۔

(۴۵۸) برعکس جسکے اگر ایک ساد ات اس صورت کی ہو ح (لا اور د اور ع) = ۰ ہمیں لا اور د اور ع کو آرا ایک نقطہ کے ہون تو یہ مساوات سطح منحنی کی ہے

اور یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اس سے نسبت ایک مجسم کے نقاط کی تعبیر نہیں ہوگی
 اور طریقہ اس بات کی ثبوت کا یہ ہے فرض کرو کہ دو مساوات اس صورت کی
 ہیں $h = (لا اور د اور ع) = ۰$ اور $h = (لا اور د اور ع) = ۰$ اور فرض
 کرو کہ قیمتیں $لا$ اور $د$ اور $ع$ کی دو نو مساوات میں ایک ہی ہیں اب اگر دو
 کرین $ع$ کو دو نو مساوات میں سی تو حاصل ہوگی یہی مساوات کوئی تقاطع یعنی فصل
 مشترک کی گشت کی سطح $لا$ پر اور یہ مساوات اس صورت کی ہوگی کہ $(لا) = ۰$
 اور ظاہر ہے کہ یہ مساوات خط مستقیم کی ہی اسیر حسی ثابت ہو سکتا ہے اگر گشت
 تقاطع یعنی فصل مشترک کا باقی سطوح $لا$ اور $ع$ پر خطوط مستقیم ہیں
 لیکن اگر گشت ایک کو کس کا تین سطح پر مستقیم ہو تو ظاہر ہے کہ کو کس خود خط مستقیم
 ہوگا اور یہ سطح ممکن کسی درجہ سے نہیں ہو سکتا ہے چونکہ تقاطع یعنی فصل مشترک
 $h = (لا اور د اور ع) = ۰$ اور $h = (لا اور د اور ع) = ۰$ خط مستقیم ہے
 تو یہاں سے معلوم ہوا کہ یہ مساواتیں سطوح منحنی سے تعلق رکھتی ہیں ۔
 (۵۹) واضح ہو کہ سطح اور خطوط مستقیم کو مختلف درجوں میں تقسیم کیا ہے
 واسطی ترتیب سے رکھنی پڑی معینہ اور عام خواص اور نتائج کو جو اس علم سطحی
 ہوئی ہیں اس واسطی اس سطح کو جو اول درجہ کی مساوات سی حسین ترین مقدار
 مجہول باقی جاتی ہیں حاصل ہوتی ہیں سطح اول درجہ کی کہتی ہیں اور کو کس مساوات
 کی جو دو درجہ سے تعلق رکھتی ہیں اور حسین ترین مقدار مجہول باقی جاتی ہیں سطح
 دوسری درجہ کی کہلاتی ہیں اور اسیر حسی اور یہی حاصل ہو سکتی ہیں ظاہر ہے

اس حصہ ہندسہ بالآخر میں کسی نوع کے وقت اور شکل واقع میں ہوئی ہی مگر تریسے
 طویل حساب اور عمل کرنے پر سہا بن اور اس پر اسلی اسپیں ایک نوع کے وقت
 معلوم ہوتا ہی اور اسے سبب سی ہم اکثر سوالات کو جس میں صرف سخت عمل کے
 ہو کے چھوڑ دیکھی اور صرف مشکل باتیں اس سوالات کی لکھ دیونگی اور خاص کر اس
 حصہ وقت سبب شکل کے واقع ہوتا ہی کیونکہ ان اشخاص کو جو عادی محاسب
 نہیں ہیں اور ان کو سہ نہیں سکتی س دھما دانیس جو موافق ان شکلوں کی حاصل ہوئی ہیں
 میں نہیں دیکھی مگر ہمیں اس میں شکل کو وسیلہ لکھنی بیان شکلوں کی بہت اسان کردیا
 اس پر اسلی ہماری عرض مطالعہ سی یہ ہم لکھ دیوہ اور غور سی شکلوں کو سہ اور
 بعد سے شکلوں کے کسی نوع کے وقت ادنیٰ مسا والوں کے سہ سے نہیں ہوتے
 اب ہم پس بحث کرہ کے لکھیں گے ۔

بیان کرہ کا

(۴۶۰) دریافت کرد مساوات کر دی سطح کے ۔ فرض کر دو کہ سطح مطلب کے
 نقاط علی التمام ہیں اور یہ بھی مان لو کہ قاعہ اور سطح کے ایک نقطہ کے
 اور سطح اور قاعہ کے مرکز کے کی ہیں اور چونکہ سطح کرہ کی ایسی ہی کہ ایک نقطہ کا
 مساوی فاصلہ ہر مرکز کرہ سے ہوتا ہی اور فرض کر دو کہ یہ مساوی ایک مقدار مقررہ ہے کہ
 جسکو نصف قطر کہتے ہیں تو اب ظاہر ہے کہ موافق فقرہ (۴۵۸) کے

$$(۵ - ۲) + (۵ - ۳) + (۵ - ۴) = ۱$$

(۴۶۱) صورت اس مساوات کی مختلف ہو سکتی ہیں موافق مختلف مقام مرکز کے

اور یہ دائرہ اپنی پہلی جب تک مینن لا اور تو کی صحیح ہیں اور اسے حسی باقی نقیض ہے
دائرہ ثبات ہو سکتی ہیں۔ اور یہ دعویٰ کہ تقاطع کرنی سطح کردی اور سطح سطح
دائرہ پیدا ہونا ہی تجربہ قلبیہ میں بخوبی ثابت کیا گیا ہے

(۴۵) دریافت کردہ مساوات اس سطح کا جو محاس کرہ کے ہو۔ فرض کرو کہ لا
اور لا، اور لا، اوتا را دس نقطہ کے ہیں جس میں سے سطح محاس کا گذر فی ہی اور فرض کرو
کہ مساوات سطح کردی کی یہی دلا۔ ط + ۲ + در۔ ص + ۲ + د۔ ع۔ س + ۲ = نق = نق
نواب ظاہری کہ مساوات اس سطح کے جو نقطہ لا، اور لا، اور لا، میں لکھی گئی ہے
یہ ہو کے م (لا۔ لا) + ن (در۔ در) + ق (د۔ د) + ع (ع۔ ع) = ۰ اور ثابت
نصف قطر کا جو نقطہ ط اور ص اور س م اور لا، اور لا، اور لا، میں ہے
گذرنا ہی یہ ہو سکتی ہے۔ لا، = $\frac{لا-ط}{ع-س}$ (ع۔ ع)

اور لا، = $\frac{لا-ص}{ع-س}$ (لا۔ لا) چونکہ ہر ایک خط سطح محاس کا یا خود سطح
عمود نصف قطر پر اور یہ عمود نقطہ محاس پر ہی نواب بسید مساوات سطح اور خط
کی یہ حاصل ہو گا $\frac{لا-ط}{ع-س}$ اور $\frac{لا-ص}{ع-س}$ = $\frac{لا-ن}{ق-س}$ = $\frac{لا-س}{ع-س}$ موافق (۴۶) کے
اسی واسطی مساوات سطح محاس کے یہ ہو جاوے گے

$$\frac{لا-ط}{ع-س} (لا۔ لا) + \frac{لا-ص}{ع-س} (در۔ در) + \frac{لا-ن}{ق-س} (د۔ د) + \frac{لا-س}{ع-س} (ع۔ ع) = ۰$$

صورت اس مساوات کی موافق شرط ایندہ کی تبدیل ہو سکتی ہے

$$(لا۔ ط) + (در۔ ص) + (د۔ ن) + (ع۔ س) = نق = نق$$

$$(لا۔ ط) + (لا۔ ص) + (ط۔ م) + (در۔ ص) + (در۔ م) + (ع۔ س) + (ع۔ م) = نق$$

جلد جمع کریں جس مساوات اور مساوات سطح مماس کو جسکو ابھی نکال اچھی بین

تو ہمیں حاصل ہو گا یہ (۱۱-ط) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) (۱۱-ص)

+ (۱۱-ص) (۱۱-ص) = نق

(۱۱-ص) (۱۱-ص) = نق اور یہ مساوات باسانی حاصل ہو سکتی ہے

مساوات کرہ سی جو یہ ہے (۱۱-ص) + (۱۱-ص) = نق یا (۱۱-ص) + (۱۱-ص) = نق

بوسیدہ لکھنی (۱۱-ص) اور (۱۱-ص) کی بجائی (۱۱-ص) اور (۱۱-ص) کی وہ

خط جو تقاطع سطح مماس اور ایک سطح اوتاریسی پیدا ہو گا معلوم ہو سکتا

ہی بوسیدہ لکھنی دتر کی جو عمود اس سطح پر ہے = ۰ اور وہ نقطہ جہان سطح

مماس مقامی کسی ایک محور سی دریافت ہو سکتا ہے بوسیدہ لکھنی مرکز ایک دن

دو مقدار غیر منقطع میں سی جو باقی محور دن پر شمار کئی جاتی ہیں = ۰

(۱۱-ص) مساوات سطح کر دی کی نسبت تر چھی محور دن کے موافق فقرہ (۱۱-ص)

یہ ہو گی (۱۱-ط) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص)

+ (۱۱-ط) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص) + (۱۱-ص)

بیان دن محسبات کا جو گردش سطح سی پیدا ہوتی ہیں -

(۱۱-ص) ایک مخروط پیدا ہوتا ہے بوسیدہ گردش کرنی دتر مثلث قائم الزاویہ کے

گرداوس کی ایک عمود کی دو عمودوں میں سی - فرض کر دو کہ اس حرکت

کرتا ہی کہ وہ خط آہستہ آہستہ جھک جاتا ہے تو اب ظاہر ہے کہ ہر ایک تراش

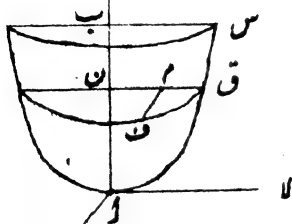
وقت جو نمود محو پر ای دایره ہو گئے اور مان لو کہ لکا اور لکھ اور لکھ محو
مقاطع علی القواہم محو ط کی ہین اور نقطہ شروع راح محو ط پر ہی اور فرض کر دو کہ

اور ایک نقطہ کی ہیں جو سطح محو و طیر واقع ہے

ظاہری کہ $n = m + f$ اور n اور m جو n کا ہی جسکا

∴ نصف محور کلان اور محور خورد ط اور ص ہی : بن ق = $\frac{ص \text{ یا } ط - \frac{1}{2}ع}{p}$

مسآودا سطح منحنی کے یہ ہوں گی $\lambda + \mu = \frac{1}{2}(\mu - \lambda)$ (ط-ع) ع

$$\text{يا لا}^{\text{ء}} + \text{ر}^{\text{ء}} + \frac{\text{ص}^{\text{ء}}}{\text{ط}^{\text{ء}}} = \text{ص}^{\text{ء}}$$


دفعہ کرد کہ طا اور ص تبدیل ہو گئی ہیں اس بات میں یقینی طبعی محذور خورد اور

صیجائی محور کھان کے ہو گیا ہی اسی واسطے سادات سطح منحنی کے جو حرکت

کرنی سے کرد مجرور کی حاصل ہوتی ہے یہ سو گئی لا + و + ص + ے = ط

پہلی کویریت سفروڈ اور دوسرے کویریت سفروڈ کہتی ہیں

(۴۷) ظاہری کدھات اوس سطح شخی کے جو کوکٹ بعید البیضی کسی کرد محو کلان

بداعتی یہ ہوگی لا + د - = ص + ح - = ص ۲ اور جب کہیں چربی ص ۲

درص بجای ط توہین حاصل ہوگی وہ سطح نخی جو حرکت کرنی کسی کرد نظر متجانس

نئی پیدا ہوئی کے

(۴۷۲) عموماً اس بات تمام سطوح منحنی کی مساوات آئندہ ہو سکتی ہے

۱+۳=۴ (۴) اگر ۴ و ۵ محو فرمایند یک جا و می‌جای یکی کرد و پیرنی سی سطح منتقصی پیدا

و تو ہی یا ز + ع - ج (لا) اگر کوں مقرر نہ کر فرض کیا جاوی۔ دریافت تو

و خط منحنی ج تقاطع کرنی ایک سطح منحنی اور سطح منحنی سی پیدا ہوتا ہے
 (۴۷۳) فرض کرو کہ تراش او سطح منحنی سی پیدا ہوئی ہے جو عمود سطح لای پر ہے
 اور ظاہر ہے کہ خاصیت خط منحنی کا وہی رہی گی کہ نقطہ شروع کسی طواف کا منی
 والی سطح کی فرض کیا جاوی۔ اب اس صورت میں فرض کرو کہ نقطہ شروع سطح لای
 پر واقع ہے تو اب ظاہر ہے کہ صورتیں اسطی تبدیل کرنی محو و کمی یہہ ہونگی
 $لا = ط + رجم + اور = - لا اور ع = س + و جس$ یہاں سی معلوم ہوتا
 ہے کہ اگر لکھیں ہم ان قیمتوں کو اسات سطح منحنی بن تو ہیں وہ خط منحنی مطلوب معلوم
 ہوگا ج تقاطع سی پیدا ہوگا۔

(۴۷۴) فرض کرو کہ وہ سطح منحنی سیہی لا + و = ن ع :
 $(ط + رجم + لا + ن = س + و جس ر)$ یا $(رجم + لا + و = ط + رجم + لا + ن)$
 کیونکہ $ط = ن$ س یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ وہ خط منحنی ج تقاطع سی پیدا
 ہوگا خط منحنی دوسری درجہ کا وہ اگر خط منحنی بیضوی ہوگا موافق فقرہ
 (۴۷۵) کی اور وہ دایرہ ہی اگر۔ اور قریب بیضوی مشابہ اس قریب بیضوی
 جو گردش کرتا ہے ہوگا جبکہ $ر = ۰$

(۴۷۶) اب فرض کرو کہ سطح منحنی مذکور سیہی لا + و + و = ع = ص
 جبکہ لکھیں ہم اس قیمتیں لا اور و اور ع جوابی نکالی گئی ہیں تو حاصل ہوگا
 یہہ $(رجم + و + و = س + و جس ر)$ یا $لا + و + و = ط + رجم + لا + ن$
 اسات حقیقت میں ایک مضوی کی ہے کہ وہ دایرہ کی ہو جاوے گی جبکہ $ر = ۰$

(۴۶۵) فرض کرو کہ سطح منحنی مذکورہ ہی جو گردش معینہ البیضوی کی گرداؤ سطحی
 محور کلان کی پیدا ہوتی ہے اور جس کی مساوات یہ ہے $y = \frac{1}{2}x^2$ ۔ $\frac{1}{2}x^2 = y$ ۔
 ابتداً ازلہ فکر کے معلوم ہو جاوے گا کہ ترائسین اس کی موقوف ہین قیمت مسد بہ
 اگر مسر رکھ ہو $\frac{1}{2}x^2$ سی تو خط منحنی بیضوی ہوگا اگر وہ مساوی $\frac{1}{2}x^2$ کی ہو تو
 خط منحنی قریب البیضوی ہوگا اور اگر مس زیادہ ہو $\frac{1}{2}x^2$ سی تو وہ بعید البیضوی
 ہوگا اور اگر $r = 0$ ۔ تو خط منحنی مذکور دایرہ ہوگا۔

بیان سطوح منحنی دوم درجہ کا

(۴۷۵) مساوات عام سطوح منحنی دوم درجہ کی یہ ہے

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

کہ ۔۔۔ واضح ہو کہ عدد آ اکثر اجزای مساوات میں صرف واسطی آسانی ہے
 کی لکایا گیا ہے اب ہم دور کرنیکی اکثر قوائی اس مساوات کو بوسیدہ تبدیل کرنی
 اذکار کی معنی تبدیل کرنیکی ہم مساوات گذشتہ کو ایک سان مساوات سی واسطی
 بحث کرنی اس مساوات کی یعنی واسطی دریافت کرنی مقام اور خاصیت اون
 سطوح منحنی کے بلکہ مساوات مرقومہ بالا تعبیر کرنی ہے تبدیل کرد نقطہ شروع کہ
 بوسیدہ لکینی $la = la + m$ اور $u = u + n$ اور $e = e + q$ جب کہ
 ہم ان قسمہ مساوات عام میں اور فرض کریں ہر ایک جز کو جس میں پہلی قوت
 غیر منقطع کی ہو ۔۔۔ تو ہمیں حاصل ہو گا یہ

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$$

اگر ہم دین لا اور د اور ع کو لا اور د اور ع سہی اور صورت مساوات
 میں کسی طرح کا فرق نہیں آویگا یہاں نشی ثابت ہوتا ہے کہ ہر ایک خط جو کچھ جادو
 لہذا ہوا نقطہ شدہ د ع سہی اور منتہی ہو دو طرف سطح منحنی کی نصف کینا جادو
 نقطہ شدہ د ع پر اور اسے معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ شدہ د ع مرکز سطح منحنی کا ہی ہے
 اسکی ایسی سمجھنی چاہی جیسی فقرہ (۸۱) میں معنی مرکز خط منحنی دوم کے
 سمجھنے کی تھی

(۸۲) قیمن م اور ن اور ق کی مساوات ایندہ سہی دریافت ہو سکتی ہے

ط م + د ن + ی ق + ک = ۰ ا مثال لا کی ہیں

ب ن + د م + ف ق + ہ = ۰ ایضا د ایضا

س ق + ی م + ن ح + ج = ۰ ایضا ع ایضا

دور کرد ق کو مساوات اول اور دوم سہی اور اول اور سوم سہی اور بعد اسکی

جو دو مساوات حاصل ہوئی اور ان سہی دور کرد مقدارن کو بعد اسکی جو مساوات

حاصل ہو اور ہمیں مقدار م پائی جادو کی اور اس مساوات سہی قیمت م کی معلوم

ہو جادو کی اور اسکی بوسیله م کی قیمت ن اور ق کی دریافت ہو جادو کی

مخرج م اور ن اور ق کی قیمتوں کا یہ دریافت ہوگا

ط ب س + د م ی ف - ط ن - ب ی - س د ط م ہ کی کہ اگر یہ مقدار = ۰

و قیمن م اور ن اور ق لا نہایت ہوئی یعنی اگر نہایت درمیان ا مثال

مساوات عام کی فرض ہو جادو کی تو مرکز سطح منحنی کا نہیں ہوگا یہ حال

قریب البینو یکا فقرہ (۸۱) میں بیان کیا گیا ہے۔

(۸۰) اب ہم استعمال کرنیکی واسطی دور کرنی اشال لاؤ اور لاغ اور عی
کی اور طریقہ کو جو واسطی تبدیل کرنی اوتار کی لکھا گیا ہے جبکہ فرض کریں ہم ان
صورتوں کو جو فقرہ (۸۰) میں لکھی گئی ہیں۔ تو —

$$\text{لا} = \text{م لا} + \text{م لا} + \text{م لا} + \text{ع}$$

$$\text{ک} = \text{م لا} + \text{م لا} + \text{م لا} + \text{ع}$$

$$\text{ع} = \text{م لا} + \text{م لا} + \text{م لا} + \text{ع}$$

جبکہ لکھیں ان قیمتوں کو مساوات عام میں اور فرض کریں اشال ہر واحد لاؤ اور
لاغ اور ع کو = تو ہمیں تین مساوات ایسے حاصل ہو گئے

$$(\text{ط} + \text{د} + \text{ج} + \text{ی}) + \text{لا} + (\text{د} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ف}) + \text{ک} + \text{ی} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ج} + \text{س} = ۰ \text{ اشال لاؤ کی گئی ہے}$$

$$(\text{ط} + \text{د} + \text{ج} + \text{ی}) + \text{لا} + (\text{د} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ف}) + \text{ک} + \text{ی} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ج} + \text{س} = ۰ \text{ اشال لاؤ کی گئی ہے}$$

$$(\text{ط} + \text{د} + \text{ج} + \text{ی}) + \text{لا} + (\text{د} + \text{ب} + \text{ج} + \text{ف}) + \text{ک} + \text{ی} + \text{لا} + \text{ف} + \text{ج} + \text{س} = ۰ \text{ اشال لاؤ کی گئی ہے}$$

اب ہم دریافت کریں گی کہ آیا یہ تبدیلی اوتار کی ہر صورت میں عمل میں آسکتی ہے یا نہیں

یعنی دریافت کریں گی کہ قیمتیں چھپے مجموعہ مقدار کی جو تین مساوات کہ شتہ میں ہیں

کس حالت میں ممکن ہیں

(۸۰) مساواتیں نئی محوری کی یہ ہیں لا = لاغ اور ک = جاع ہوا

فقرہ (۸۰) کی ایسی واسطی جب کہ لکھیں ہم ان قیمتوں کو مساواتوں کہ شتہ کے مساوات

اول میں تو حاصل ہو گا یہ (ط + د + ج + ی) + لا + (د + ب + ج + ف) + ک + ی + لا + ف + ج + س = ۰

= یہ مساوات اس سطح کی ہی جو نقطہ شروع میں سی لکھ رہی تھی اب ظاہر
 ہے کہ اوپر اس سطح کی ہر ایک نقطہ کی شرط ایندہ پورا کرتی ہیں اشال لا " =
 یعنی کسی نسبت درمیان لا اور ج پہلے معلوم ہو جاتی ہے یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر نیا
 محور دیکھنا چاہو اس سطح میں تو یہی شرط نہ کہ پوری ہو جاوے گی پس ہم کوئی
 ایک سمت محور لا کر فرض کر سکتے ہیں یعنی اس کی سمت متقرر نہیں ہے کہ سمت محور
 کی ایک خاص سطح معلوم ہیں ہی جو اسے ثابت کی گئی ہے اور جز لا " کا دور کرنا
 ہی اس سطح سے جگہ درگاہ ہیں ہم لا اور ج کو اشال لا " میں سی اور مساوات
 " سی جو یہ ہیں (لا = لا اور ج - ج اور ج) تو ہمیں حاصل ہوگی ایک
 مساوات جو پہلی حاصل ہوئی تھی اور یہ مساوات اس سطح کی جو نقطہ شروع
 میں سی گذرتی ہے اور جبکہ ہمیں ابھی معلوم ہوا ہے یہاں سے ثابت ہوا کہ اگر ہم
 کچھ نہیں محور " کو اس سطح میں تو جز لا " کا جائزہ لیا جبکہ دریافت کیا ہمیں لا
 اور ج کو اس سطح پر تو ظاہر ہے کہ نسبت درمیان لا اور ج کی دریافت ہو
 ہی اشال لا " = سی مثلاً جبکہ متقرر ہیں ہم مقام محور لا " کا یعنی جبکہ
 فرض کریں کوئی ایک خاص قیمت لا اور ج کی تو ظاہر ہے کہ ہمیں ایک سطح گذرے گی
 جوئی نقطہ شروع سے معلوم ہو جاوے گی جس سطح میں کوئی سی دو خط اور کسی
 مقام میں کچھ کی محور " اور ج کی ہوگی اور جبکہ " کو اس سطح کچھ نہیں تو ظاہر
 ہے کہ لا اور ج کی ہیں معلوم ہو جاوے گی اور اس سطح سے نسبت درمیان لا
 اور ج کی معلوم ہو جاوے گی اشال لا " = سی - جو کہ نسبت میں

مقدار لا اور ج کی معلوم ہو گئی ہی اور یہ مقدار میں خود معلوم نہیں ہوئی ہیں تو
اسی معلوم ہوتا ہی کہ محور لا نہایت اسی طور پر تبدیل ہو سکتی ہیں کہ مختلف حاصل ضرب مقبلا
پر منقطع کیے دور ہو جاوے۔

(۴۸) فرض کرو کہ نئی محور متقاطع علی القوائیم ہیں۔ ظاہری کہ اس صورت محور لا
عمود سطح لا پر ہو گا یا وہ خط جس کی مساد میں لا = قع اور ج = ح
عمود اوس سطح پر ہو گا جس کی مساوات یہ ہے

$$(ط + ج + ی) + لا + (د + ب + ح + ن) + ی + (ی + ف + ح + س) = ۰$$

$$: ط + ج + ی = (ی + ف + ح + س) \quad ۱ \quad \text{موافق فقرہ (۴۶) کی}$$

$$د + ب + ح + ن = (ی + ف + ح + س) \quad ۲ \quad \text{جدا لکھیں یہی مساوات میں}$$

۱ کی جو دوسری مساوات سی حاصل ہوگی تو ہمیں مساوات ایندہ وسطی قیمت

$$ح کی حاصل ہوگی \{ (ط - ب) - (ف - ی) + (ی - ح) \} = ۰$$

$$+ \{ (ط - ب) - (س - ب) + (ی - ف) + (ف - ی) + (ی - ح) - (ط - ب) \} = ۰$$

$$+ \{ (س - ط) - (س - ب) + (د + (ط - ف) - (د + (ب - ط) - (س - ن) + (ن - ح) \} = ۰$$

$$+ \{ (ط - س) - (ف + د + (ن - د) + (د - ن) \} = ۰ \quad \text{ابن مساوات سویم یہی کم کریں}$$

کم ایک قیمت ح کی دریافت ہو جاوے گی اور اسکی وسیلہ سے قیمت لا اور ج کا

ہی کہ مقام محور لا کا دریافت ہو جاوے گا اور مقام اوس سطح کا یہی جو عمود دی اور

جسین محور لا اور ح مقیم میں دریافت ہو جاوے گا اور اس سطح جس میں دریافت

کر کے ہیں اسی سطح لا کو عمود محور لا کہ اجزا لا کو اور ح کو جاتی ہیں

جو شرط کہ موافق اس عمل ہوگی اور کسی ایک مساوات میسری درجہ کی پیدا ہوگی جیسا
 گذشت بہت مساوات سی معلوم ہوتا ہی اور سی قیمت \bar{C} کی معلوم ہو جاوے گی اور
 یہی حال محور \bar{C} کا ہو گا بمانشی بات ہوا کہ بن قیمت مساوات مرفوعہ بالا میسری درجہ
 کی تین صحیح قیمت \bar{C} اور \bar{C} اور \bar{C} کی ہیں ان تین مقادیر سی قیمت \bar{C} اور \bar{C} اور \bar{C}
 کے ہر دو بافت ہو جاوے گی اور چونکہ ہر ایک مقدار کی صرف ایک ہی قیمت ہی تو اسی معلوم
 ہوا ہی کہ صرف ایک ہی صورت محور تقاطع علی نقباء ایسی ہو سکتی ہی کہ اگر مساوات \bar{C}
 منحنی نسبت اس کی لٹی جاوے تو او اس میں سی اجزای حاصلہ مقادیر غیر منقطع کی ہر ایک
 (۲۸۶) جبکہ مرکز کو کس کا ہو تو صورت اس کی مساوات کی رسید تبدیلی نہ کرے والا

کی بعد اختصار کی ہو جاوے گی ط لا ب و س ا ع ہ کہ = جبکہ قیمتیں مثال
 کی اور دور کہ بن علامت مقادیر مجہول کو تو ل لا ہ م و ن ع = ا واضح ہو کہ
 ہم ترتیب تبدیلی کے بدل سکتی ہیں یعنی ہم پہلی دو کر سکتی حاصلہ مقادیر غیر منقطع
 کو جیا کہ نفرہ گذشتہ بن کیا اور بعد اس کی دو کر سکتی ہیں تین یا فی جزو کو رسید تبدیلی
 نقطہ شروع کی اور مساوات آیندہ بعد دو تبدیلی کے حاصل ہو سکے گا

$$ل + م + ن + ع + ف + ح = ۰$$

(۲۸۳) وہ مساواتیں جن کا مرکز گنہائی بن قسم پر ہیں اور یہہ صورت بن

علامت مقادیر ل اور م اور ن پر موقوف ہیں

(۱) علامت ان تینوں کی مثبت ہو سکتی ہے

(۲) دو مثبت اور ایک منفی ہو سکتا ہے

(۳) ایک صبت اور دو مہنی ہو سکی ہیں

لیکن تینہ مقدار منفی نہیں ہو سکتی۔ جبکہ لکھیں گاجی ل اور م اور ن کی مقدار پندرہ

$\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ کو ضمیمہ ط ۱ ب اور ب کے تحت تو صورتیں مذکورہ بالا

اس طرح بر تعریف مومن $\frac{r_c}{r_s} = \frac{r_c}{r_s} + \frac{r_m}{r_s} + \frac{r_{\text{مومن}}}{r_s}$

$$= \frac{r_c}{r_s} - \frac{r_y}{r_c} - \frac{r_u}{r_b} = \text{بہت سارے اور جلد طریقہ حاصل کران}$$

سطوح منحنی کا بوسیدہ اور نر اش کی ہو کا جوا دس سطح میں ہو کی جو توار ہی سطح اوتا

لیلی یا لعل و سطح او آری میں ہونے کی لیکن صورت اخیر میں انکو ترش غظیم نقیض کہتے ہیں

بیان مجسم مضویہ کا

$$1 = \frac{r_c}{r_s} + \frac{r_i}{r_c} + \frac{r_b}{r_b} \quad (1) \text{ صورت (۲۸۲)}$$

اسطی دریافت کرنی اور نشان کی جو سطح لائے ہو گا فرض کر دو $= 0 \div \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

المسألة ١٠٠ - ...

الف "مع بر" $\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} = 0$

بہانسی معلوم ہوا کہ نریشہای عظیم معصوی ہیں۔ فرض کر دو *

ع = م : تراش تواری سطح لاد کی بینو کی $\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r_s} - 1$

نو = ن : تراش سوزنی سطح لاج کی بیہ ہوگی $\frac{r}{r_s} + \frac{r}{r_p} = 1 - \frac{r}{r_s}$

$$\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} \Rightarrow \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}$$

اول سا د ا ن سدا اتونی سسی بیضی کی ہی م باء = سسی ع = سسی

تبیب ع - س نو خط منحنی ایک نقطہ نو جانا ہی اور جیب ع براہو کا س سہ

بہ ایک جسم بیضوی کا سطح کو ع پری
 اور تراش ق ت ر کی یہی بیضوی ہی اور سطح مغنی خیال کی جاسکتی ہے کہ وہ
 پیدا ہوئی نہی بوسیدہ حرکت بیضوی سے کہ ب کہ جو کم و بیش ہوتا ہے اور یہ بیضوی دہر
 کی طرف توازی اپنی حرکت کرتا ہے اور مرکز اس کا خط سے ع میں واقع ہے
 فرض کرو کہ ن ق ر ایک خاص مقام بیضوی مذکور کا ہے اور مان لو کہ

س ن = ع اور س ل = ط اور ن ر = لا

ان م = لا اور س ب = ب اور ن ق = ک

م ت = ک اور س د = س

تو اب بوسیدہ بیضوی ق ت ر کی یہ حاصل ہوگا $\frac{لا}{ط} + \frac{ک}{س} = ۱$

اور بوسیدہ بیضوی د ر و اور د ق ب کی یہ حاصل ہوگا

$\frac{لا}{ط} + \frac{ک}{س} = ۱$ اور $\frac{ک}{س} + \frac{لا}{ط} = ۱$ اسبواسطی $\frac{لا}{ط} = \frac{ک}{س}$

جبکہ ضرب کریں پہلی مساوت کو $(\frac{لا}{ط})$ یا ایک مساوی $(\frac{ک}{س})$ یعنی یہی حاصل

ہوگا $\frac{لا}{ط} + \frac{ک}{س} = \frac{لا}{ط} = ۱ - \frac{ک}{س} = ۱ - \frac{ک}{س} + \frac{ک}{س} + \frac{لا}{ط} = ۱$

مجسم بعد بیضوی کی بیانیں

(۴۸۹) صورت (۲) $\frac{لا}{ط} + \frac{ک}{س} = ۱$ تراشہای عظیم کی یہ

سطح لا و پر $\frac{لا}{ط} + \frac{ک}{س} = ۱$ (۱)

سطح لاع پر $\frac{ک}{س} - \frac{لا}{ط} = ۱$ (۲)

سطح ع پر $\frac{ک}{س} - \frac{لا}{ط} = ۱$ (۳)

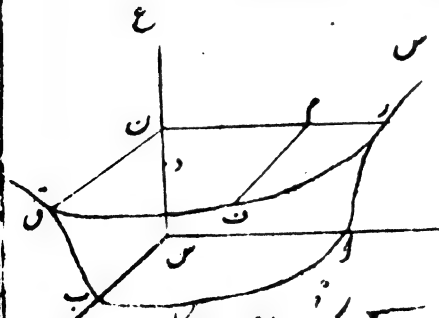
مسادات پہلی بیضوی کی ہی جیسی محور $ط$ اور $ب$ ہیں اور (۷) اور (۳) مساواتیں بعید بیضوی کی ہیں جن دونوں کا قطر متجانس ۷ سے $ما = ۳$ ہی اگر لاکم ط سی ہو یا تو کم تب سی ہو تو $ع$ ناممکن ہوگا جبکہ فرض کریں $ع$ اور $ک$ اور لاک کی قیمت $م$ اور $ن$ اور $ق$ تو ہمیں برآین متوازی لاک کی بیضوی حاصل ہونگی اور متوازی $ک$ اور $ع$ کی بعید بیضوی حاصل ہونگی (۴۸۷) شکل رقم ۲۵۱ میں تعبیر کرتی ہیں اٹھواں حصہ اس سطح منحنی کا

اوب بیضوی لاک پر ہی اور اور بعید بیضوی $ع$ پر ہی اور $ب$ ق دوسرا بعید بیضوی $ک$ پر ہی۔ یہ سطح منحنی خیار کئی جاسکتی ہے کہ وہ پیدا ہوئی ہے بوسیدہ حرکت بیضوی سے اوب کی جو کم دریاہ ہو تاہی اور یہ بیضوی $ن$ پر ہی ایسی حرکت کرتا ہے اور مرکز اس کا $س$ ع میں ہی فرض کروں $ق$ ارتفاع بیضوی $ن$ کو $ز$ بالا لاکا ہی اور فرض کرو۔

سن = $ع$ اور سن $ط = ۱$ اور $ن = ۱$

نم = لا اور سن $ب = ۱$ اور $ق = ۱$

مف = $ک$ اور سن $د = ۱$



تو اب بوسیدہ بیضوی

ف ق ر کی حاصل ہوگا

$$لا = \frac{۲}{۱} + \frac{۲}{۱} = ۱$$

بوسیدہ بعید بیضوی اور اور $ب$ کی پیدا حاصل ہوگا۔

باجمبر

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اس سے پہلے $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور جبکہ

مساوات اول کو $\frac{1}{2}$ سے یا اول کی مساوی نہ $\frac{1}{2}$ سے تو

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1$$

اس سطح کو مجسم عبید البیضوی ایک صفحہ کی کہتی ہیں کہ چونکہ اوپر سے ایک مسلسل سطح منحنی

پیدا ہوتی ہے مثلاً ایک صفحہ کی منحنی $\frac{1}{2}$ = تو سطح منحنی اور مجسم عبید البیضوی کی

ہی کی جو حرکت کرنی سی کرد فطر تنجاس کے پیدا ہوگی۔

(۴۴) نقطہ شروع میں کسی گدڑ نامہ اوکھنچو ایک خط جسکی مساوات میں یہ ہیں۔

لا۔ اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ اور جبکہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ان قسم کے مساوات آئندہ ہیں

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1$$

تو ہمیں حاصل ہو گا

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 1$$

یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ یہ خط میکا سطح منحنی سے جبکہ کہ فرج کسر کا مساوی ایک

مقدار صحیح اور محدود کی ہے فرض کرد کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ تو اب

ظاہری کہ یہ خط سطح منحنی سے فاصلہ لا نہایت پر میکا یعنی یہ خط سطح منحنی کا خفہ

الملاقات ہے۔ مساوات مرقوم بالا سے نسبت درمیان آ اور $\frac{1}{2}$ کی معلوم ہوگی

جبکہ خط الکا خط متفرقات سطح منحنی کا ہو۔ اگر جاسی آ اور $\frac{1}{2}$ کی کہیں

یقین ازکی $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کو تو ہمیں حاصل ہوگی ایک مساوات جس میں مفادیر آ

اور آ اور $\frac{1}{2}$ کی جائیگی اور جبکہ لو کہیں تمام خط متفرقات الملاقات سطح

منحنی سے ہو گا کہ کوئی سا نقطہ آو سکا نسبت مرقوم بالا کہیں

مسافات اس سطح مخفی کے یہ ہیں۔

باس لا' + طاسو' = طاسع' یا $\frac{9}{8} + \frac{2}{3} = \frac{17}{6}$ سم فقرہ
(۱۴۲) میں لکھیں گے کہ یہ مساوات اس مخروطی کیکاراس نقطہ شروع پر ہی اوجھسا
یا تراشش متوازی محور کی بیضوی اسی —

(۴۸۹) صحت (۳) $1 = \frac{14}{15} - \frac{5}{15} - \frac{4}{15}$

تراشیدنی عظمیٰ اسکی سطح لاکو پر سیدھ ہوگی $\frac{1}{10} - \frac{1}{20} = 1$ ----- (۱)

الفن "لأع" البعا "ط" - "ع" = 1 - (2)

$$(۳) \dots ۱ - = \frac{۲۴}{۲۳} + \frac{۱}{۲۳} \dots \text{ایسا " کوع" ایسا " کوع"}$$

مساوات (۱) مساوات بعید البیضوی کی بی جبری محور z اور $z = 1$ ہے۔

اور ساتھ (۲) مسادات ایک ایسی عید البیضہ کی سی خشکی محو ۵۲ اور ۵۳

بن ادراسات (۳) کا لوگس نامکئی ایسا واسطی سطح ہے سطح منحنی کسی کسی پہلے

اُن تراشونیں سی جو تھوڑی سی سطح اوتاری کی ہیں وہ جو تھوڑی لکڑ اور لکڑ کی

ہی بعد البیضوی منوکی اور وہ جو منوازی کرع کی ہی ایسی بیضوی ہی جسکی منو

بهری $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} =$ بهائیات موناہی کہ بہہ مضوی ممکن ہوگا

الرق یا لکم طسی و اسوسطی اگر دھستہ متوازی کج اور ط کی

فاصلہ بریز کر کسی کتبہ جاوین تو کوئی حصہ سطح منحنی کا ان سطح

مین یا یا سنن حاوی یکا —

یہاں سی ثابت ہوا ہے کہ صورت (۷) اور (۳) میں یہی مغز الملاقات خود طے حاصل ہوئی
جبکہ دور کرین گی ہم اس مقدار مقررہ کو جو کہ مساوی نہیں پائی جاتی ہیں ہی۔

بیان ان سطوح منحنی کا جو مرکز نہیں رکھتی ہیں

(۴۹) واضح ہو کہ اس صورتیں مساوات عام میں سی وہ اجزاد ہو سکتی ہیں جو حاصل
مقادیر غیر منقطع سی حاصل ہوتی ہیں جبکہ (۴۹) میں ہونے اس صورت میں اسی
ہو جا دیکر $ط + ب + س + ع + ۲ + ک + لا + ۵ + ۲ + ج + ع + ک = ۰$

اسی دور کرین تین اور جزو دیکر فرض کرو $لا = م + لا$ اور $ک = ن + ک$ اور

$ع = ق + ع$: $ط + ب + س + ع + ۲ + (ط + م + ک) + لا + ۲ + (ن + ۵ + ک)$

$۲ + (س + ق + ج + ع + ک) = ۰$ فرض کرو اشغال $لا$ اور $ک$ اور $ع = ۰$

$م = -ک$ اور $ن = -ق$ اور $ق = -ج$ اور چونکہ اس قسم کی سطح منحنی

میں مرکز نہیں ہوتا ہے اسی واسطے قہرین بعض نام مقدار $م$ اور $ن$ اور $ق$ کی لانا ثابت

ہونی چاہی اسی سبب سے دو یا تین اشغال $ط$ اور $ب$ اور $س$ میں سی = ۰ کی توجہ

پس یہاں ثابت ہوا کہ جب اجزا $لا$ اور $لا$ اور $ع$ اور $ک$ دور ہو گئی ہیں اور وقت ایک

یاد و اشغال $لا$ اور $ک$ اور $ع$ کی بھی جاتی رہی ہیں بہ صورت مطابق فقرہ (۴۹) کی

اب ظہری کہ تینوں اشغال = ۰ کی نہیں ہو سکتی ہیں کیونکہ اس صورت میں مساوات عام

سطح منحنی ہو جاوے گی یہاں سی ظہر ہوتا ہے کہ اس مساوات کی دو صورتیں حاصل ہو سکتی

ہیں اول جبکہ $ط$ جانا رہی اور دوم جب $ط$ اور $ب$ دونوں جاتی رہیں۔

(۵۰) فرض کرو $ط = ۰$ اور چونکہ ہر تین مقدار $م$ اور $ق$ اور $ج$ دریافت کرینی

نواب ہم فرض کر سکتی ہیں کہ ۔ اور اشال لا اور ع کو ۔ اسو اسطی صورت سادات

کی یہ ہو جاوے گی $س ع + ک ل =$ یا $(س ع) + (ک ل) = ع = ل$

اس کی دو صورتیں ہو سکتی ہیں جو موقوف ہیں علامت چس اور چس پر ۔

(۱) صورت (۱) فرض کرو کہ علامتین $س ع$ اور $ع ل$ ایکسی اور مثبت ہیں

اور اگر منفی ہوں تو ہمیں علامت لا کی بدلی چاہی تاکہ صورت مساوات کی یہی ہو جاوے

لکھو $\frac{1}{س} بجای چس$ اور $\frac{1}{ل} بجای چس$ اور دور کر کے علامت لا ع اور

جسکی کچھ صورت نہیں ہی صورت مساوات کی یہ ہو جاوے گی $ل = ع + \frac{ع}{ل}$

اور تراشہ بای عظیم سطح لا پر یہ ہوگی $ل = ع$ (۱)

ایضا لا ع ایضا $ل = ع$ (۲)

ایضا ق ع ایضا $ل + ع =$ (۳)

مساواتین (۱) اور (۲) کو کس دن قریب البیضوی کی ہیں جو لا کی مثبت سمت کی طرف کینچر

کی ہیں اور (۳) مساوات نقطہ کی ہی جو نقطہ شروع خود ہی

واسطی دریافت کرنی اور تراشو کی جو متوازی

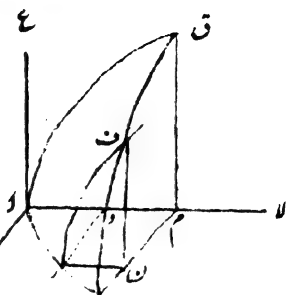
لا کی فرض کرد ع = ق د $\frac{ق}{ل} = ل - \frac{ق}{ل}$ (۱)

ایضا لا ع کی فرض کرو $ر = ن - \frac{ع}{ل} = ل - \frac{ع}{ل}$ (۲)

ایضا ق ع کی فرض کرو $لا = م - \frac{ع}{ل} = م$ (۳)

مساوات (۱) اور (۲) مساوات قریب البیضوی کی ہیں اور یہ مساوی

تراشہ بای عظیم کی ہیں اور ان میں صرف مقدار مقررہ کا فرق ہی اور آہی



معلوم ہوتا ہے کہ نقطہ شروع
مختلف مقام پر ہی بلحاظ خط
منحنی کی اور (۳) بیضوی ہے۔

(۲۹۹) شکل مرفومہ بالامین آف اور کہ حد فرب البضوی کی سطح لایع اور

لادری میں اور سطح منحنی حرکت قریب البیضوی لاق سے پیدا ہوتی ہے اور یہ قریب

البصیرۃ: حرکت تہذیبی اینی کر تہابی اور اس اسکا قریب بعضوی کر کر کی ساتھ

حرکت کنایه دفع کردن که فن اب یک خاص مقام قریب البصر می شود

کاپی اور مان لو کہ لم = لا اور من = و اور ن = ع اور کینچرو

متوادی لَو یا مَن کی تو اب بوسیدہ فریب البغوی رفت کی یہ حاصل ہوگا

$$u = \frac{x}{J} + \frac{y}{J} \div \left(\frac{x}{J} - u \right) J = (J - u) J = J^2 - uJ = y = \frac{y}{J}$$

اس سطح منحنی کو مجسم ذریعہ البیضی ^{مضامی} دار کہتی ہیں۔ اور یہ مرکب

ایک نام صفحہ سی بی مثل لکھنؤ میں محترم قریب البیضاء کی۔

(۴۹۰) صورت (۲) فرض کرد کہ علامت ω و ω' لایق مختلف ایک دوسری میں

(۱) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ تراشہای عظیم کی سطح لائے پر $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

..... ایضاً بلع پر ع - - - - - (۲)

ایضاً "..... طبع پر لکھا۔ (۳)

مسادات (۱) اور (۲) قریب البیضی میں اول

مطابق منت لا کی ہی اور دوسرے مطابق منعی لا

ٹی بی اور (۳) مسادت اون دو خطوں کی یہ نقطہ

شروع کنی میں تراشیں اور سطحوں پر جو متوازی لکڑاؤ

لاۛ کی مین قریب البیضوی مین اور دہ جو متوازی مجمع کی ہی بعد البیضوی مین

(۷۹۷) اق قریب البیضوی سطح لآع پرای اور آر قریب البیضوی سطح لآع پرای

اور سطح منحنی حرکت قریب السیفی لائن سی پیدا ہوتی ہے جو متوازی اپنی حرکت کرتی ہے۔

اور اس کا فریب البیضوی اور کی ساتھ حرکت کرتا ہی فرض کرو ان

ایک خاص مقام اس نوحہ قریب البیضوی کا ہے اور مان لو اوم = لا

ادرم ن = وادرن ت = ع اور کینجرو ہوازی من کی تو اب سبیلہ

فرق السیفوی راق کی ہیں یہ حاصل ہوگا۔

$$u = \frac{u}{J} - \frac{v}{J} = (u - v) \frac{1}{J} = \frac{1}{J} (u - v) = \frac{1}{J} (u - v)$$

اس سطح منحنی کو بنیہ البیضوی دار مجسم قرب البیضوی کہتے ہیں۔

(۴۸) مساوات برضوی دار اور بعد البضوی دار محسوس فریب البضوی حاصل

سکتی ہے محکمہ مہنوی اور محکمہ بند البضوی ایک صفحہ سی جسطوری لہ سا

فرب الفیض کی مبادیات مبصّوئی حاصل مولیٰ نبی فقرہ (۲۶۸) میں ہے

اس فرض کی کہ مرکز لا نہایت فاصلہ پر ہی تبدیل کر دے نقطہ شروع کو اس سطح

منہجی پر بوسیدہ لکھنی لا۔ طکی کچنی لا۔ کی نواب ظاہری کہ مساوات مجسم بنی

اور مجسم البیضویکی بہ سو کی $\frac{(۷-ط)^۲}{ط} + \frac{۲}{ط} + \frac{۲}{س} = ۱$ فرض کر دو کہ

م اور م فاصلہ اس نقاط افقی سی یا اون تراشوسی ہے جو سطح لای پر لای

پر کینچ جاوینکی $ب = ط - (م - ط) = ۲ - (م - ط) = ۲ - م + ط$ اور

س $ط - م = ۲$ جبکہ لکھیں ان قیمتوں کو اس مساوت میں $\frac{۷}{ط} - \frac{۷}{ط} + ۱ + \frac{۷}{ط} + \frac{۲}{ط} = ۱$

$= ۱$ نویدہ حاصل ہوگا $\frac{۷}{ط} - \frac{۷}{ط} + \frac{۷}{ط} + \frac{۲}{ط} = ۱$ یا $\frac{۷}{ط} = ۱$ اور $ط = ۷$

یا $\frac{۷}{ط} - \frac{۷}{ط} + ۷ - م = ۲$ یا $\frac{۷}{ط} = ۲$ اور $ط = \frac{۷}{۲}$ یا $\frac{۷}{ط} = ۷ - م + ۲$ اور $ط = ۷ - م + ۲$

جبکہ ط نہایت فرض کیا جادی - یہاں سی معلوم ہوتا ہے کہ وہ مساوات جو حاصل

ہوئی داسطی مجسم بیضوی اور مجسم البیضویکی وہ صادق ہوئی داسطی مجسم قریب

البیضویکی بعد لکھنے قیمتوں مذکورہ بالا کے -

(۴۹۹) ہمنی فقرہ (۴۹۲) میں بیان کیا ہے کہ دونو ط اور ب دور ہو سکتی ہیں اور

اس صورت میں مساوات کی بہ سو جادیکی -

س $ع + ۲ + ۷ + ۵۲ + ج + ۷ = ۰$ ہو سید اور طریقہ تبدیلی کی جو

فقرہ (۴۹۲) میں لکھا گیا ہے ہم اشال لا اور ج کو دور نہیں کر سکتی ہیں مگر

اشال ع اور مقدار مقررہ کردہ ہو سکتا ہے یہاں سی ثابت ہوتا ہے کہ صورت

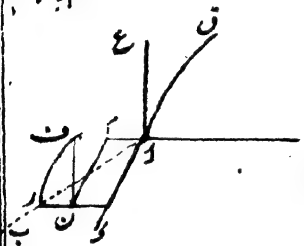
مساوات کی بعد تبدیلی کے بہ سو جادیکی س $ع + ۲ + ۷ + ۵۲ = ۰$ یا

$۷ = ۷ - ل + ل + ع$ اگر $ل = ۷$ اور $ع = ۰$ فرض کیا جائے

(۵۰۰) یہاں سی ظاہر ہوتا ہے کہ دو صورتیں موافق غلات ل اور ل کی ہو سکتی ہیں

جو دونو مثبت یا ایک منفی اور ایک مثبت ہوئی صورت اول فرض کر دو کہ ل اور ل

دو لون بنت ہیں لو اب ظاہری کہ تراش سطح لاکو پر یہ ہوگی $ل + لا = ل' = (۱)$
 اور تراش سطح لاکو پر یہ ہوگی $ع = ل' لا (۲)$ اور سطح کج پر یہ ہوگی
 $ع = ل' لا (۳)$ مساوات (۱) خط مستقیم اب کی اور (۲) مساوات قریب البصر
 لاق کی ہی اور (۳) بھی مساوات قریب البصر کی ہی مگر شکل میں کچھ ہوا ہے



ہی اور تراشیں اُن سطح پر جو متوازی
 سطحوں مذکورہ بالا کی ہیں مثلاً ہر ایک صوت
 میں ہیں اور سطح منحنی حرکت قریب البصر
 لاق سی پیدا ہوگی جبکہ یہ قریب البصر

متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور اس سطح آ کر بناتا ہی فرض کر دو کہ رفت
 ایک خاص مقام اس قریب البصر کا ہی اور مان لو $ام = لا$ اور $من = ع$
 اور $ن = ف = ع - لا = ل' - لا = (ل' - لا + لا) = ل' + لا$
 چونکہ یہ سطح منحنی ایک استوائی ہی جس کا قاعدہ قریب البصر ہی ہے اس لیے اس کا اکثر
 سطح منحنی دویم درجہ نہیں کہنتی ہیں۔ صورت (۲) اگر علامت ل اول
 کی مختلف ہوں تو یہی یہی سطح منحنی پیدا ہوگی مگر مختلف مقام پر ہوگی۔

باب ہشتم (۸)

سطوح منحنی استوائی اور مخروطی کے بیان میں

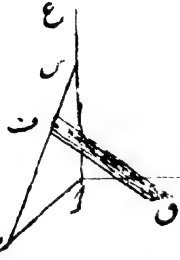
(۵۰۱) واضح ہو کہ اگر ہم خواص سطوح منحنی کی عموماً طور سے بیان کرتے ہیں
 سطوح منحنی ہو سکتی ہیں اور یہ اس وقت ہوگا جبکہ حدود ادنیٰ موافق ادنیٰ خاص

ترکیب پیدا کرنی سطح منحنی کے لکھی جاوے گی اور بعد اُسکی اونسہ ایک خاص
 صورت جریہ میں لکھیں مثلاً "حریر اقلیدس میں تعریف استوائہ کی یہ کہی گئی
 ہی استوائہ ایک سطح منحنی ہے جو پیدا تو ہائی گردش ایک خط مستقیم سے کرد
 ایک دائرہ مفروض کے جبکہ خط مذکور متوازی ایک خط مفروض کی ہو اور اگر
 قاعدہ استوائہ مذکور کا دائرہ نہ ہو بلکہ کوئی اور خط منحنی ہو مثلاً "فرض کرد کہ
 قریب البصر ہی ہو تو ظاہری کہ اس صورت میں بھی ایک ایسی سطح منحنی حاصل
 جس میں خواص ضروری استوائہ کی باقی جاوے گی اور اب ظاہری کہ بہت سی سطح
 پر تعریف استوائہ کی صادق آوے گی اسے سطح منحنی تعریف سطح منحنی محدود طی
 وغیرہ کی ہو سکتی ہے۔ بعد بیان کرنی ترکیب پیدا ہونی سطح منحنی یا دوس
 قاعدہ کی موافق جسکی خطوط حرکت کرتی ہیں مساوات ان سطح منحنی
 کی دریافت کرنی چاہی یعنی مساوات اونکی نسبت اوتار لا اور تو
 اور ع کچھ دتر ایک نقطہ سطح منحنی کے ہیں معلوم کرنی چاہی اور ظاہری
 کہ یہ مساوات عام ہوگی اور یہ موافق خاص فرضوں کی مساوات خاص
 سطح منحنی کے ہو جاوے گی۔

سطح منحنی کے بیان میں

(۵۰۲) واضح ہو کہ ہم پہلی ایک آسان اور فائدہ مند مثال لکھیں گے تاہم ہم
 کوئی ایسی آئندہ آسان ہو جاوے گی۔ دریافت کردہ سطح جو حرکت ایک خط
 مستقیم سے پیدا ہوگی اور یہ خط متوازی اپنی حرکت کرتا ہی اور ایک خاص

مستقیم سنی کہ تا ہی در ضلع کہ لا اور کو اور کے محو ارتفاع علی القوام میں
اور مان لو کہ مساواتین خط مستقیم بس یہ میں لا اور یہ واسطی اسانی سطح کو ع



$$\left. \begin{array}{l} \text{مین فرض کیا ہی کہ کو + ق = ع} \\ \text{لا} \end{array} \right\} (۱)$$

اور فرض کرو کہ مساواتین خط متحرک ق و ک کی

ایک خاص مقام پر یہ ہے

$$\left. \begin{array}{l} \text{لا = ع + ط} \\ \text{کو = ع + ص} \end{array} \right\} (۲)$$

ظاہری کہ لا اور ح مماس اُون اور کو
ہیں جو کہ نشان ق و ک کا محور لا اور

لا کو سنی تا ہی اور چونکہ ق و ک متوازی اپنی ک کہ تا ہی اس واسطی

نشان اسکی یہی متوازی اپنی ہوگی یہاں یہ معلوم ہوتا ہی کہ لا اور ح مقدار متعز

اور معلوم میں اور چونکہ ط اور ص اوتار اوس نقطہ کی ہیں جہاں ق و ک قطع کرتا

سطح لا کو کو ظاہری کہ یہ مقدار برید لین کے موافق ہر ایک تبدیلی مقام ق و ک کی

اور چونکہ یہ غیر منقطع ہیں اس واسطی یہ مقدار میں مساوت سطح میں جو انجام میں حاصل

ہوگی ہیں باقی جاوے کے اب ظاہری کہ مقدار ط اور ص مقدار میر لا اور کو

اور ح میں برابر ہو سکتی ہیں - نقطہ ق و ک جہاں ق و ک ہوتا ہی

بس سنی یہ مساواتین بوسیلہ (۱) اور (۲) کی حاصل ہو گئی

$$\text{لا = ع + ط اور ع = ع - ط اور کو = کو - ص} \quad \text{ط + ص = کو}$$

لیکن چونکہ (۱) واسطی ہر ایک قیمت لا اور کو اور ع کی صادق آتی ہے

ایسا سطحی بوسیدہ کہتی قیتوں کی مساوات (۱) میں ہمیں مساوات نپیدہ حاصل

$$\text{ہوگی } n = \left(\frac{7}{3} + v \right) + q = \left(\frac{7}{3} \right) = 1 \text{ اور اس مساوات سے معلوم}$$

درمیان $\frac{7}{3}$ اور v کی معلوم ہوتا ہے یا ایسی نسبت درمیان $\frac{7}{3}$ اور v ^{عوض} $\frac{7}{3}$ اور

v کی معلوم ہوتی ہے یا اور نسبت کو تعمر کرتی ہے جو کہ مفاد پر سادی مقدار

$\frac{7}{3}$ اور v کی اسپین کہتی ہیں یعنی جبکہ لکھیں بجائی $\frac{7}{3}$ اور v کی مفاد پر

لا۔ $\frac{7}{3}$ اور v - 7 کو v (۲) سے حاصل ہوتی ہیں تو ہمیں حاصل ہوگی ایک

مساوی نسبت درمیان مفاد پر لا $\frac{7}{3}$ اور v کی معلوم ہوگی اور اس مساوی کو

مساوات سطح منحنی کے کہتی ہیں :- $n = \frac{7}{3} (v - 1) + n = (v - 7) + (7)$

$$- \frac{7}{3} (v - 1) = 1 - \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + n = v + q = 1$$

یہ مساوات ایک سطح متویکی ہے اور یہ ایک عام طریقہ درسطی دریافت کرنی تھا

ایک سطح متویکی ہے کیونکہ اسطور سے یہ مساوات ہر ایک قسم کی محور وکی میں

معلوم ہو سکتی ہے اور یہ مساوات ایک شان خاصیت سطح متویسی دریافت کی

کئی ہے اب ہم بحث ہے سطح منحنی کے کرنیکی جو حرکت ایک خط مستقیم سے پیدا ہو

ہے جبکہ خط مذکور موافق ایک قاعدہ مفروض کی حرکت کرتا ہے *

بیان استوائی سطح منحنی کا

(۵۰۳) حد ایک استوائی سطح منحنی پیدا ہوتی ہے گردش ایک خط مستقیم سے

جو حرکت توازی اپنی کرنا ہی سطح جو بین اور سدا اور کا ایک خط منحنی

مفروض بناتا ہے خط مستقیم کو جو حرکت کرنا ہی خبر کرکس یعنی خط متوازی اور خط منحنی

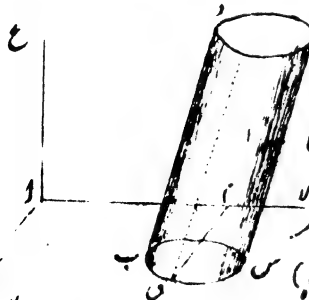
بود کسی سیرگی حرکت سی پیدا ہوتا ہی درانی چکر کس اکتی ہین دریافت کرد مساوات
 سطح منحنی کے - فرض کرو کہ مساواتیں خط متحرک کی ایک خاص مقام پر ہین
 $لا = ط + ح$ اور $د = ح + ع$ اور چونکہ یہ خط متوازی انہی حرکت
 کرتا ہی تو ظاہری کہ مقادیر لا اور ح یکساں ہوں گے تو ع کا فرق نہیں آدیکا اور اگر مقام
 خط متحرک پر قیمت اکی یہ ہی رہی کہ قیمت ط اور ح کی جواو تارادس نقطہ کی ہین چنانچہ
 خط متحرک سطح لا و سی متساوی ایک خاص مقام پر ہی رہی اور قیمت اکی بدلی چکی
 مقام خط متحرک کا بدلیکا مثلاً جبکہ ایک نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی اپنی جایی کو غیر
 علیحدہ ہونی کی خط متحرک سی یعنی جبکہ صرف اسی خط پر حرکت کرتا ہی تو ظاہر
 کہ ط اور ح میں کسی طرح کا فرق نہیں آدیکا اور جبکہ نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی
 جاو ایک خط متحرک سی اسی خط متحرک پر ظاہر کہ ط اور ح غیر منقطع یعنی کم و زیادہ ہونگی
 یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ یہ دونو مقدار متفرقہ ایک ہی دقت میں اور غیر منقطع ہونگی
 دقت میں ہونی ہین تو ظاہری کہ یہ دونو ایک دوسری پر موقوف ہونگی
 اور اسکو اس طرح پر تعبیر کرتی ہین ایک مقدار جملہ دوسرے لگا ہی -
 $ح = ک (ط)$ یعنی جملہ $(ط)$ ہی $او$ جبکہ کہیں ہم قیمت $ط$ اور $ح$ کی
 جو مساوات کہ شہ سہ حاصل ہونگی تو $د = ح + ع$ - $ک (لا - ع)$ اور یہی
 مساوات سطح منحنی استوائیہ ہی -

(۵۴) ضرور جملہ ک کی خاصیت سطح منحنی پر جبکہ وہ ایک خاص مقام پر موقوف
 ہوئی فرض کرو مساواتیں $ا$ اسی ریکٹرکس یعنی خط منحنی کے یہ ہین -

۷ (لا اور ک اور ع) = ۰ اور ۷ (لا اور ک اور ع) = ۰ چونکہ خط
منحنی پر ایک مقام پر خط متحرک سبب متساوی تو ظاہری کہ مساواتیں ان دونوں کی
پر ایک نقطہ تقاطع پر حاصل ہونگی اور اب ظاہری کہ مفادیر لا اور ک اور ع
چار سوائے ان خط طند کو رہا لاسی دور ہو سکتی ہیں اور بعد اس تبدیلی کے
میں ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی جس میں صرف مقدار ط اور ص اور مقدار
مفرہ پائی جاوے گی اور اسی صورت جملہ ک کی دریافت ہو جاوے گی
جملہ لکھیں ہم جایی ط اور ص کی اونکی قیمتیں لا - ع اور ک - ع
تو ظاہری کہ ہمیں مساوات استوائہ مطلوب کی حاصل ہو گئے -

(۵۰۵) مثال اول - فرض کرو ڈائی گرام منحنی خط منحنی دائرہ ب ق س
سطح لائے میں ہی اور پالو کہ لا اور ک اور ا و مارا دسکی گزگی ہیں تو ظاہری کہ
مساوات ہلکی بیہ ہوگی $\{ \begin{matrix} (۱) - (۲) \\ (۳) - (۴) \end{matrix} \} = ۰$ اور فرض کرو
بد اور ق اور س کی مختلف مقام خیزی گزگش بنی خط متحرک کی جس کی مساواتیں

$$\begin{cases} لا = ع + ط \\ ک = ع + ص \end{cases} \text{ یہ ہیں}$$



اور اب ظاہری کہ واسطی تعبیر کرنی اس بات
کی کہ نقطہ ق پر دائرہ اور خیزی گزگش
یعنی خط متحرک متساوی مساوات (۱) س
دور (۲) ایک ہی ہونی چاہیے یعنی لا اور ک اور ع کی اس مقام پر ایک ہی ہونے

$\left. \begin{array}{l} \text{شع} = \text{ع} = 0 \\ \text{لا} = \text{لا} = \text{ط} \\ \text{د} = \text{د} = \text{ص} \end{array} \right\} \text{ جبکہ لکھیں کہ ان قیمتوں کو مساوی (۱) میں تو یہ حاصل ہوگا}$
 $(\text{ط} - \text{لا})^2 + (\text{ص} - \text{ح})^2 = \text{نق}^2$

تو اب ظاہر ہے کہ صورت جملہ کی دریافت ہو گئی ہے جبکہ لکھیں قیمتیں مساوی
 کی جو (۲) میں ہیں تو $(\text{لا} - \text{لا} - \text{ع})^2 + (\text{د} - \text{ح} - \text{ع})^2 = \text{نق}^2$
 اور یہ مساوات ترجمہ استوائی کی جگہ قاعدہ دایرہ ہے اور یہ سطح لادین
 (۵۰۶) فرض کرو کہ مرکز دایرہ کا نقطہ شروع پری -

$\text{لا} = 0$ اور $\text{د} = 0$ $\therefore (\text{لا} - \text{ع})^2 + (\text{د} - \text{ح} - \text{ع})^2 = \text{نق}^2$
 اور اگر نقطہ شروع انجام قطر جو متوازی محور لا کی ہے واصل کیا جاوے
 تو $(\text{لا} - \text{ع})^2 + (\text{د} - \text{ح} - \text{ع})^2 = 2 \text{نق}^2$ $(\text{لا} - \text{ع})^2$ -

(۵۰۷) فرض کرو کہ محور استوائی کا متوازی محور ع کی ہے تو اب لا اور ح ہوا
 $=$ کیونکہ یہ محاسن اور زاویوں کی ہیں جو نشان خط متحرک کا سطح لا اور ع ہیں

ع سی بنانا ہے $(\text{لا} - \text{لا})^2 + (\text{د} - \text{د})^2 = \text{نق}^2$ اور اگر محور ع سی
 منطبق ہو جاوے تو لا + د = نق اور $\text{ع} = 0$ ان صورتوں میں استوائی کو
 سید استوائی کہتی ہیں اور اس کی اور خط متحرک کے مساوات ایک ہی ہے اگر دائی ہو
 یعنی خط منحنی ایک دایرہ سطح لا ع پر فرض کیا جاوے تو اس صورت میں مساوات سید
 استوائی کی یہ ہوگی $\text{لا} + \text{ع} = \text{نق}^2$ -

(۵۰۸) فرض کرو کہ دائی ریکٹرکس یعنی خط منحنی ایک قوس البقیوی سطح

لاکو پری اور راس اسکا نقطہ ششروع پر اور محور اسکا منطبق محور لا پری تو اس صورت میں مساواتیں دائمی ریگرس یعنی خط منحنی اور خط متحرک کی بہہ ہوگی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ع} = \text{ق لا} \\ 0 = \text{و} \end{array} \right. \dots (1) \text{ اور } \left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{ع} + \text{ط} \\ \text{د} = \text{ع} + \text{ص} \end{array} \right. \dots (2)$$

اور اب ظاہر ہی کہ مساواتیں انکی نقطہ قطع پر بہہ ہوگی

ع = ع = ۰، آد = لا = لا = ط اور د = د = ص جبکہ لکسین ہم ان قسموں

مساوات (۱) میں تو حاصل ہوگا یہ ص = ق ط :- (د - ع) = ق (لا - ع)

اور یہ مساوات ایک نہر ہی استواء کی جگہ قاعدہ قریب البصوی سطح لا پری

(۵۰۹) فرض کرو کہ دائمی ریگرس یعنی خط منحنی قریب البصوی سطح لا پری

اور محور اسکا لا اور نقطہ شروع لا ہی - اور فرض کرو کہ جری ریگرس یعنی خط

متحرک متوازی سطح لا کی پی تو اب ملاحظہ کرو مساواتیں بہہ ہو گئے

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ع} = \text{ق لا} \\ 0 = \text{و} \end{array} \right. \dots (1) \text{ اور } \left\{ \begin{array}{l} \text{لا} + \text{د} = \text{ط} \\ \text{ع} = \text{ص} \end{array} \right. \dots (2)$$

تو اب مساوات سطح منحنی کے بہہ ہوگی ع = ق + د + ق لا دیکھو د سطحی

اسکی ثبوت کی فقرہ (۴۹۹) کو -

بیان سطوح منحنی مخروطیکہ

(۵۱۰) حد - سطح منحنی مخروطی پیدا ہونے پر حرکت ایک خط مستقیم کی جگہ

ایک سر ہمیشہ گذرنا ہی ایک نقطہ مفروض میں کسی جگہ دوسرا سر ایک خط

مفروض کا بنانا ہی۔ نقطہ مفروض کو مرکز سطح منحنی کا اور خط مستقیم کو خبر شکر گس یعنی
خط متحرک اور خط منحنی مفروض کو ڈائری ریڈیٹر گس کہتے ہیں۔ فرض دطا اور ص اور س
اور م مرکز کی ہیں تو اب ظاہری کہ مساواتیں خط متحرک کی یہ ہو گئے

لا - ط = (د - ع - س) [جبکہ ایک نقطہ سطح منحنی کا بدلتا ہی ایسی جگہ کو غیر
د - ص = (د - ع - س)] چوڑی خط متحرک کی یعنی جگہ وہ اسی خط پر حرکت

کرتا ہی تو ظاہری کہ مقادیر آ اور ح مقدار مقررہ ہونگی مگر جبکہ نقطہ گذرتا ہی
ایک خط متحرک سہی دوسری پر تو یہ دونوں غیر منقطع یعنی کم زیادہ ہونگی یہاں
معلوم ہوتا ہی کہ مقدار آ اور ح ایک ہی وقت میں مقدار مقررہ ہوتی ہیں اور ایک ہی وقت
میں غیر منقطع تو صاف ظاہری کہ وہ جملہ ایک دوسری کی ہونگی : $ح = ک (د - ع)$ اور
جبکہ لکھیں گے ہم قیمت آ اور ک کی تو حاصل ہوگا یہ۔

د - ص = $ک (د - ع - ط)$ اور نہ ہی مساوات عام سطح منحنی محدود ط کی ہے

(۵۱۱) صورت جملہ ک کی خاصیت ڈائری ریڈیٹر گس یعنی خط متحرک کے خاص

صورت پر موقوف ہو کی بوسیلہ مساواتوں ڈائری ریڈیٹر گس اور خبر شکر گس کے ہم

مقادیر آ اور ح اور د اور ع کو دور کر نیکی ایک خاص صورت میں جب کہ صورت اسناد

میں یہاں تو اب ظاہری کہ ہر بعد اس تبدیلی کے ایک ہی مساوات حاصل

ہو کی حسین مقدار آ اور ح کی پائی جاوے گی اور اسی صورت جملہ ک

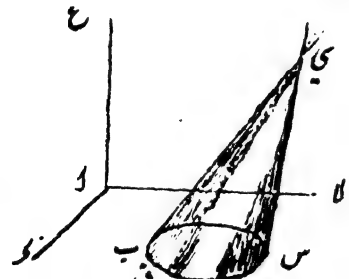
کی دریافت ہو جاوے گی اور جبکہ لکھیں ہم قیمت آ اور ح کی $د - ط = ع - س$

اور $د - ص =$ تو ہر مساوات مخروط مطلب کی ایک خاص صورت

(۱۲) مثال - فرض کرو کہ ڈائی ریٹنگس دائرہ ب ق س سطح لاؤ میں ہی تو مساوات اسکی یہ ہوگی $(لا - لا)^2 + (دو - دو)^2 = فن^2$ (۱)

اور مساواتیں جنہیں ٹرگس ب ق یا ق کی جو نقطہ جی (ط اور ب اور س) میں سی گذرنا ہی یہ ہوگی $لا - ط = د - (ع - س)$ واسطی تعبیر کرنی اس سے $د - ص = ج - (ع - س)$ (۲)

بات کی کہ جنہیں ٹرگس دائرہ سی ملنا ہی ظاہر ہے کہ مساوات (۱) اور (۲)



ایک ہی جونی چائی =
 $ع = ع -$
 $لا = لا = ط - د - س$
 $د = د = ص - ج - س$

اب اگر کہیں ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں تو $(ط - د - س - لا)$ بن جائے گا
 $+ (ص - ج - س - د) = فن^2$ (۳) جبکہ لکھ کر قسین تو اور ج (۲) میں ہیں مختصر کریں اس مساوات کو تو حاصل ہوگا یہ -

$(\frac{د - ع - س - لا}{س - ع} + \frac{د - ع - س - د}{س - ع}) = فن^2$
 یہ مساوات ایسی طرحی محو ط کی ہی جسکا قاعدہ دائرہ ہی مقیم سطح لاؤ میں ہی - فرض کرو مرکز دائرہ کا نقطہ مشرق پر ہی

$(ط - ع - س - لا) + (ص - ع - س - د) = فن^2$ (۴)

۴۷۹
دائی راکٹر گس اور جزیر گس سید ہیں -

$$(۱) \left\{ \begin{array}{l} \text{ک} = \text{ق لا} \\ \text{ع} = \text{د} \end{array} \right. \quad \text{اور} \quad (۲) \left\{ \begin{array}{l} \text{لا} - \text{ط} = \text{ل} - \text{ع} - \text{س} \\ \text{ز} - \text{س} = \text{ح} - \text{ع} - \text{س} \end{array} \right.$$

نقطہ تقاطع پر $\text{ع} = \text{ع} = \text{د}$ اور $\text{لا} = \text{لا} = \text{ط} + \text{ل} - \text{د} - \text{س}$

اور $\text{ز} = \text{ز} = \text{ح} + \text{ص} - \text{د} - \text{س}$ جبکہ لکھیں ان قیمتوں کو مساوی

(۱) میں اور لکھیں اس میں قیمت ح اور ل کی جو (۲) سے حاصل ہو

$$\text{تو } \left\{ \begin{array}{l} \text{ح} + \text{ص} - \text{د} - \text{س} \\ \text{ک} = \text{ق} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{ط} + \text{ل} - \text{ع} - \text{س} \\ \text{د} - \text{س} \end{array} \right\}$$

(۵۱۶) فرض کرو کہ اس یا مرکز محوط کا نقطہ شدوع پری -

$\text{ط} = \text{ص} = \text{س} = ۰$ اور مساوات محوط کی جس کا دائی راکٹر گس سید ہے

$\text{ک} = \text{ق لا}$ اور $\text{ع} = \text{د}$ اور جس کا اس نقطہ شدوع پری سید ہو

$$\text{دو} = \text{ق لا}$$

(۵۱۷) طریقہ ایندہ واسطی دریافت کرنی مساوات سیدی محوط کی

جس کا اس نقطہ شدوع پری بہت مفید معلوم ہوتا ہے - فرض کرو کہ

محوط کا کہ بی اور سید ہی مان لو کہ یہ نقطہ شدوع بن سسی گذر کی

ہو، ایک ہی سطح فرض یا فاعہ پری جس کی مساوات سیدی -

$\text{لا} + \text{د} + \text{ن} = \text{ع}$ کہ اور اس میں مقدار ل اور ح اور ن تمام

اون زادوں کی میں جو کہ محوط لا اور ح اور ن سے بنائی ہو

(۵۱۸) کی اور سیدی فرض کرو لا اور ح اور ن اور ایک نقطہ کی میں

جو محیط قاعدہ پری اور مان لو کہ $ر$ دہ زاویہ ہی جو ضرب کر کے یا خط متحرک
 کو دھکا بٹاتا ہے محور محیط سی تو اب موافق خاصیت مثلث قائمہ الزاویہ کی
 کہ $\sin(ا + ب + ج) = ۱$ (۲۷) اب اگر لکھیں دو نوسا دی نہ کہ کہ کو
 برابر ایک دوسرے کی تو $(ا + ج + د + ن + ع) = (ا + ب + ج + ع)$ (۲۸)
 اور یہ مساوات ہر ایک نقطہ سطح منحنی پر صادق آوے گی کیونکہ $ر$ اور $ج$ اور $ن$
 ایک ہی چیز ہیں یعنی اونکی قیمت نہیں بدلیگی اور $س$ سطح کی صورت میں جو متوازی
 قاعدہ کی اور نقطہ $(ا + ج + د + ن + ع)$ کی سطح منحنی میں سی گذرے گی ہے
 اگر محور محیط کا منطبق ہوئی محور $ع$ پر تو $ا = ج = د = ن = ۰$ اور $۱ = ۱$

$$\sin(ا + ب + ج) = ۱ \quad (۲۸)$$

(۵۱۸) دریافت کرو خط منحنی جو تقاطع کرنی ایک سطح مستوی اور تر محلی
 کے سی حاصل ہو گا ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سطح مذکور نقطہ شروع اوتار میں ہے
 گندنی ہی اور اس فرض سی عموماً مساوات میں کسی نوع کا خلی نہ ہوگا
 بلکہ لکھیں گے $ا + ج + د + ن + ع$ کی مساوات میں اونکی قیمتیں جو ۰ میں
 ہیں تو معلوم ہو گا کہ انہیں خط دوم درجہ کی اور اونکی اختلاف کی
 سطح منحنی کو نو اڈل کی بیان میں

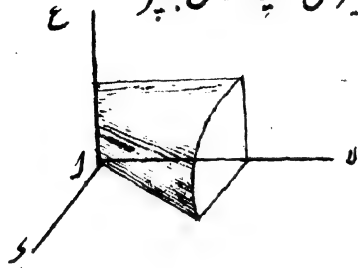
(۵۱۹) سطح منحنی کو نو اڈل کے پیدا ہوتی ہی حرکت ایک حصہ
 سی عموماً حرکت کرتا ہی ہوا ہی ایک سطح کی اور جبکہ ایک سر حرکت
 کرتا ہی ایک خط مستقیم پر جبکہ دوسرا ایک سطح منحنی مفروض بناتا ہے

پہلی ہم ایک آسان مثال اس قسم کی سطح منحنی کی لکھیں کہ فرض کرو کہ محور
 سے ایک ڈائی رکرٹس ہی اور فرض کرو کہ جنیٹر ٹرکس توانی سطح لاؤ کی ہی تو اب
 ظاہری کہ مساوات میں جنیٹر ٹرکس کے ایک خاص مقام پر پہنچنے کی $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$...
 اب ظاہری کہ جب ایک نقطہ حرکت کرتا ہے سطح منحنی پر بغیر عہدہ ہونی کی
 جنیٹر ٹرکس با حفظ متحرک سی یعنی صرف اسی خط پر سرکتا ہی لوگا اور اس
 مقدار پر وہ ہونگی اور جبکہ یہ نقطہ ایک مقام خط متحرک سی اس کی دوسری مقام پر جاتا ہی تو
 لا اور اس مقدار غیر نقطہ یعنی کم و زیادہ ہونگی یہاں سی ثابت ہوا کہ ہر دو مقدار میں تقریباً
 وقت میں جتنی ہن اور غیر متحرک ہی ایک سیو نہیں ہونی ہن اس کے ایک مقدار انہن سی جلد دیکھا ہو
 ۱۰ ص = ۱ ص (۱) جبکہ لکھیں انکی قیمتوں کو تو ۱ ص = ۱ ص (۱) اور یہی مساوات
 عام نام سطح منحنی کو نو اڈل کے ہونگی۔

(۵۲۰) صورت جد کہ کی ڈائی رکرٹس دوم پر موقوف ہی پہلے
 مساواتوں ڈائی رکرٹس اور جنیٹر ٹرکس کے مقدار لا اور تو اور ع
 کی دور ہو سکتی ہی جب کہ پہلی دور لگی گئی ہن بعد اس کی یہیں ایک اسی مساوات
 حاصل ہونگی جس میں لا اور ع پائی جاوے گی اور جبکہ لکھیں کے ہم اس مساوات میں قیمت
 ع اور ط کی جوع اور ط ہی تو ظاہری کہ مکمل مساوات ایک خاص سطح
 منحنی کو نو اڈل کے حاصل ہو سکے۔

(۵۲۱) فرض کرو ڈائی رکرٹس دوم ایک دایرہ منواری سطح کے مرکز کی
 ہی اور مرکز اس کا محور لا ہن ہی اس مساوات اس کی یہ ہوگی

تو اب ظاہر ہے جہاں کہ بیہ ڈائی رگٹر کسٹن ہی
 خبر تر کسٹن سے اوس جا پر۔



$$ع = ع = ص$$

$$لا = لا = ط$$

$$و = و = و ط$$

$$ن = من + و ط = نق$$

یہاں ہی معلوم ہوتا ہے کہ مساوات مطلوب بیہ سی $ع + ط = \frac{و}{و} = نق$ چونکہ
 بیہ سطح مخفی مرکب محو خط اور میخ سی ہی ایسا سطح اسکو ڈالیں صاحب فی کونو
 کیونی اس نام رکھا تھا جسکی بہت سی خواص دریافت کئی تھی۔

اگر محور لا ایک ڈائی رگٹر کسٹن اور دوسرا ایک دایرہ متوازی سطح $ع$ کی فرض کیا
 جاویں اور خبر تر کسٹن متوازی سطح $ع$ کی تو اس صورت میں مساوات بیہ ہو گے
 $لا + \frac{ط}{و} = نق$ ۔

(۵۲۷) فرض کرو کہ محور $ع$ ایک ڈائی رگٹر کسٹن ہی اور ایک خط مستقیم دوسرا
 اور مان لو کہ خبر تر کسٹن حرکت کرتا ہے متوازی سطح $لا$ کی تو اب ظاہر ہے کہ مساوات
 درجہ ڈائی رگٹر کسٹن بیہ ہو گئی $و = ع + ن$ اور چونکہ مساوات میں خبر تر کسٹن کی بیہ

$و = لا$ اور $ع = ص$ کی تو اوس نقطہ پر جہاں کہ بیہ ہو گئی بیہ حاصل ہو گا
 $ع = ع = ص$ اور $و = و = و$ $و = ع + ن$ اور $لا = لا = \frac{و}{و} = \frac{و}{و + ن}$

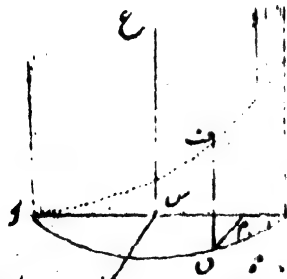
$$ن = \frac{و + ن}{و} = و + ن = (و + ن) \frac{و}{و} = و + ن$$

یا ۵۰ لا - د ۵۰ کو + ن لا - م کو = ۰

(۵۰۲) فرض کرو کہ محور χ ایک دائی رکتشکس ہی اور مان لو کہ دوسرا دائی رکتشکس
 ڈورا ایک بیچ کا بیچ کا محور منطبق ہی محور χ پر۔ واضح ہو کہ ڈورا بیچ کا بیچ کا محور
 ہیکس بنائی ہو سیدہ لیشی ایک ڈوری کی کرد ایک سیدی استوائی کی اسطرح ہر کر ڈورہ
 مذکورہ ایک راہ بنائی ہو عورسی یا از قاعدہ ایک مثلث قائم الزاویہ کا منطبق ہو قاعدہ
 استوائی پر اور مثلث پیشا جادی کرد استوائی کر کے تو قدر قائم الزاویہ کا ہیکس کو
 بناویکا۔ دریافت کرو مساواتین ہیکس کے۔ فرض کرو کہ مرکز استوائی کا نقطہ شروع

محور دن تقاطع علی القوائم کا ہی اور مان لو کہ $s = m$ لا اور $m = c$ لا اور
 $c = q$ اور نصف قطر استوائی کا $= \frac{1}{2} ab$ ظاہر ہی کہ $c = q$ ایک نسبت
 رکتشکس ہی کو سی یعنی بندہ قاعدہ کی قاعدہ مثلث سنی نسبت مقررہ رکتشکس ہی
 $c = q$ ہی کو اور کو مساوی اوس قوس کے ہی جسکی جیب سنی کو اول نصف
 قطر ہی اسو اسطرح $c = \frac{1}{2} ab$ یا $c = \frac{1}{2} ab$ اور لا کو $= \frac{1}{2} ab$

اور ہی مساواتین ہیکس کے نشانکی ہونگی
 اس ہم کل مطلوب بیان کر نیکی جو یہی
 دریافت کرو سطح منحنی جو بنی ہی ایک خط
 مستقیم ہی حرکت کرتا ہی تھواری قاعدہ
 استوائی کا جگہ بنائی ہو محور ہی اور
 سرکشکس ہی ہیکس پر۔ مساواتین دائی رکتشکس اگر کا فاصلہ درمیان ڈورہ دن بیچ کے



$$1 - (ع - ص) = 1 \div \frac{ط - ط}{ص - ط} = \frac{ط}{ص} = \frac{ط}{ط} = 1$$

$$= \frac{ط - ط}{ط - ط} = \frac{ط - ط}{ط - ط} = 1$$

$$= \frac{ط - ط}{ط - ط} = \frac{ط - ط}{ط - ط} = 1$$

اگر کو یہ مساوات حاصل ہو سکتی ہی

$$ص - ط = ط - ط = 0$$

(۵۲۵) دعویٰ ایندہ بھی اسطور پر بہت آسانی سے حل ہو سکتا ہی
دریافت کرو مساوات ایک سطح منحنی کے جو پیدا ہوتی ہی حرکت ایک خط مستقیم
سی جو سرکٹا ہی توازی سطح لای کی جبکہ دوسری اسکی دو خط منحنی
پر ہون جو یہ ہیں $ع = ح (د)$ سطح $ط - ط = ط - ط = 0$
سطح $ط - ط = ط - ط = 0$ پر تو اب ظاہر ہی کہ مساوات مطلوب یہ ہو کے

$$1 = \frac{ط}{ط} + \frac{ط}{ط} = 2$$

(۵۲۶) اس قسم کی سوالوں میں تھوڑی ہوشیاری ضرور ہی اسطی
کرنی مقام محرو دین اور سطح اذتاری کی اسطرح پر کہ مساوات میں معلوم
اور وہ جو دریافت کرنی منظور ہون ایک بہت آسان صورت جبریدی
تیسرے جو جادین مثلاً دریافت کرو ایک سطح منحنی کو جو پیدا ہوتی ہی حرکت
ایک خط مستقیم سی جو ہمیشہ گذرتا ہی تین خط مغود میں سی - فرض کرو
تینوں خط توازی خط ط محرو دین کی ہیں اسید اسطی مساوات میں تینوں ڈا
رکٹر کس کے یہ ہو سکے

$$\text{اور } \begin{cases} 3 = \text{ص} \\ 3 = \text{ع} \end{cases} \text{ اور } \begin{cases} 2 = \text{ط} \\ 2 = \text{ع} \end{cases} \text{ اور } \begin{cases} 1 = \text{ط} \\ 1 = \text{و} \end{cases}$$

مساد تین خط متحرک کی بہرہ میں $\text{لا} = \text{لغ} + \text{ط}$ $\text{سا} = \text{س} + \text{ع}$ $\text{ایسا} = \text{ایط}$
 $\text{ک} = \text{ک} + \text{لا} + \text{س}$ اور یہاں $\text{س} = \text{ص} - \text{ج}$ $\text{ط} - \text{چ}$ جو کہ بہرہ خط
 تینوں خطوط معلوم سے متناہی تو ظاہری کہ بہرہ مساواتیں حاصل ہوگی
 $\text{ص} = \text{ک} + \text{ط} + \text{س}$ اور $\text{ط} = \text{ک} + \text{س} + \text{ط}$ اور $\text{ص} = \text{ک} + \text{س} + \text{ط}$
 $\text{ص} - \text{اب}$ بمقدار ط اور $\text{ص} - \text{اور ک}$ اور ک کی بوسیہ ان مساواتوں
 اور مساوات خبریہ کر کے دور کرنی چاہئی ایسا اسطی بعد تفریق کی ہوگی
 بہرہ حاصل ہوگا $\text{ک} - \text{س} = \frac{7}{2} (\text{ط} - \text{ل})$ اور $\text{ل} - \text{ط} = 2$

$1 = (ع - س) ۲$ اور $۲ = ح (ع - س) ۲$ یہاں
 معلوم ہوتا ہے کہ جب درجہ ۱ اور ۲ کو نو ٹھوس وات مطلوب
 یہ حاصل ہوگی $(لا - ط) ۱ = (ک - ص) ۲ = (ع - س) ۲ = (لا - ط) ۲$
 $(ک - ص) ۲ = (ع - س) ۲$ اور ۲ اور ۱ دویم درجہ کی ہی کیونکہ جلا
 حار میکا دیکھو اسطی تفصیل اس باب کی ہائی مرصاحب کی سند ہے

باب ششم

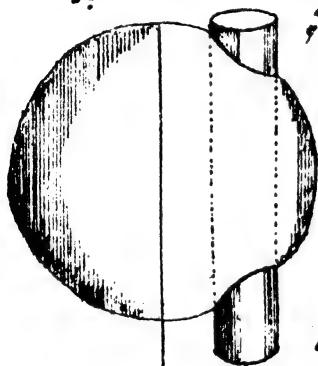
باب ہفتم
بیان اُن خطوط مخفی میں جو دُوم کہتی ہیں

(۵۷۴) حد۔ ایک خط منحنی دو چندہ دار پیدا ہوتا ہے حرکت ایک نقطہ سے جو صرف سمت اپنی حرکت کی ہی نہیں بلکہ تباہی جیسا کہ سطح منحنی میں

ہوتا ہی وہ سواری اسکی اوس سطح کو بھی بدلتا ہی جسین وہ حرکت کرتا ہی
 - اگر ایک دائرہ ایک صفحہ کا غدر پکٹیا جاوی تو ظاہری کہ وہ خط منحنی سطح کہلاوگا
 اور جیکہ صفحہ کا غدر صورت استوائہ میں لپٹی تو ظاہری کہ اس صورت میں دائرہ
 دو خم حاصل کر لگا ایک وہ جو دائرہ مذکور سب دور ہونی کے رکھتا ہے
 اور دوسرا وہ جو اوسنی سب لپٹی کا غدر کی حاصل کیا ہی ایسا سطحی اس
 صورت میں اسکو خط منحنی دو چند خمدار کہتی ہیں -
 (۵۲۸) خط ط منحنی دو چند خمدار پیدا ہونی میں بوسیدہ تقاطع کرنی دو سطح منحنی
 مثلاً قائم کرد ایک برابر کار کا ایک سطح استوائہ پر اور متحرک کرد دوسری برابر
 اس سطح پر لے کر آخر وقت حرکت کی ہمیشہ سطح استوائہ کو مس کری اسی ایک خط
 منحنی دو چند خمدار پیدا ہوگا اور کو یہ خط دائرہ نہیں ہی پر بھی ہر ایک نقطہ اس
 خط منحنی کا مساوی فاصلہ پر اوس سری برابر سی ہی جو قائم ہی -
 یہ خط منحنی ایک حصہ اوس کرہ کا ہی جسکا نصف قطر مساوی اوس خط کی ہی
 جو واقع ہی درمیان دوسروں پر کار کی اور اب یہاں سی معلوم ہوتا ہی کہ خط منحنی
 نہ لور پیدا ہوتا ہی تقاطع کرنی اس کرہ اور استوائہ کسی -
 (۵۲۹) واضح ہو کہ بوسیدہ مساواتوں دو سطح منحنی کے مساوات اذکنی تقاطع
 کی دریافت ہو سکتی جو فی الواقع مساوی خط منحنی دو چند خمدار کی ہو سکے
 بوسیدہ دور کرنی متعادیر غیر متقطع کی دو مساوات میں سی نشان خط منحنی
 کی سطح اوتاری پر حاصل ہونگی - دو نشان ان میں سی کافی ہوگی

داسطی معلوم کرنی خط منحنی دو چند خمدار کی۔ کیونکہ ہم دو استوائہ دو نشان خط
منحنی میں کسی گذار سکتی ہیں جو عمود ایک دوسری پر اور سطح اوناری پر ہوگی
تو اب ظاہری کہ وہ خط منحنی جو تقاطع کرنی ان استوائوں کیسی پیدا ہو گا وہ
خط منحنی مطلوب ہو گا۔ یہ ثبوت مشابہ اوس ترکیب کی ہی جسکی وسیلہ سی
میں مساوات خط مستقیم کے دریافت کی تھی کیونکہ خط مستقیم ہی تقاطع
کرنی دو سطح متوازی سے پیدا ہو سکتا ہی۔ اب ہم بیان کر سکیں گے
خطوط منحنی دو چند خمدار کی جو تقاطع کرنی دو سطح منحنی کیسی پیدا ہوتی ہیں

(۵۳۰) فرض کرو کہ خط منحنی مذکور پیدا ہو گا



تقاطع کرنی ایک استوائہ اور کرہ کیسی
اور مان لو کہ نقطہ شروع مرکز کرہ کا
اور محور استوائہ کا سطح لایع میں واقع ہی
اور متوازی محور کی ہی فرض کرو کہ
فاصلہ درمیان مرکز کرہ اور مرکز استوائہ

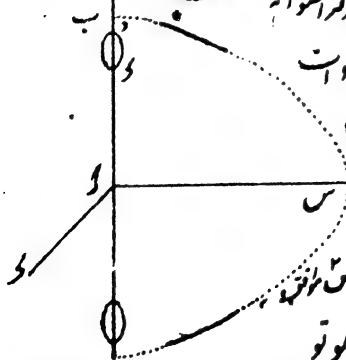
= س تو اب ظاہری کہ مساوات

کرہ کی یہ ہوگی $\text{لا} + \text{د} + \text{ع} = \text{ط}$

اور مساوات استوائہ کی س

یہ ہوگی $(\text{لا} - \text{س}) + \text{د} = \text{ص}$ منفرقا

(۵۴۰) جبکہ دور کرین ہم د کو تو



یہ حاصل ہوگا $\text{ع} = \text{ط} + \text{س} - \text{ص} - ۲$ (۱) اور جبکہ دور کرین لا

کو تو حاصل ہوگا یہ $\text{ع} = \text{ط} - \text{ص} - \text{س} = ۲$ س یا $\text{ص} - ۲$ (۲)

(۱) سی معلوم ہوتا ہے کہ نشان خط منحنی کا سطح لایع پر ایک حصہ قریب البضوی

بسن کا ہے جبکہ اس س پی اور اس $= \frac{\text{ط} + \text{س} - \text{ص}}{۲}$ اور

اب $\frac{\text{ط} + \text{س} - \text{ص}}{۲}$ اور (۲) معلوم ہوتا ہے کہ نشان خط منحنی کا سطح لایع پر شمل

د بیضی صورتوں پر ہی مقام جبکہ بوسیہ قیمن ع کی دریافت ہو چکا ہے۔

$$\text{د} = \frac{\text{ط} - (\text{ص} - \text{س})}{۲}$$

$$\text{ای} = \frac{\text{ط} - (\text{ص} + \text{س})}{۲}$$

جبکہ اس زیادہ ہوتا ہے یعنی جسطہ استواء دور ہوتا جاتا ہے نقطہ او

سی اویس قدر ای کم ہوتا ہے اور صورتیں بیضی قریب ایک دوسر کی آتی ہیں

جبکہ شکل (۱) میں پی (۱) (۲) (۳) (۴) (۵)

اور جبکہ $\text{س} = \text{ط} - \text{ص}$ نو

ای = ۰ اور بیضی صورتیں ایک دوسر کی ملن گی شکل (۵) میں جبکہ

س بڑھتا ہے یہی شکل (۳) حاصل ہوگی اور بہرہ باہر کی شکل (۴) کو شکل

(۴) ہو جاتی ہے اور آخر جبکہ $\text{س} = \text{ط}$ تو اس صورتیں بیضی بالکل

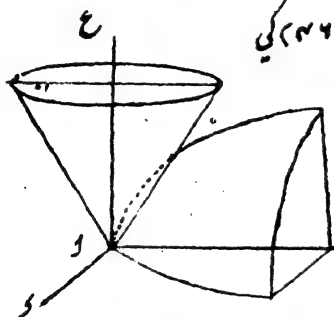
جانی رہتی ہے۔ محلف قیمن س اور $\frac{\text{ط}}{۲}$ وغیرہ ص کی فرض کر سکتے

ہیں اور اس صورتیں میں نشان معلوم ہو چکا دیکھی اور انکی دریافت کرنی میں

کیطرح کی شکل واضح نہیں ہوتی ہے لیکن ہم اسکا بخوبی امتحان کر سکی

کیونکہ اگر ہم ایک مثال کو تجویزی توضیح سے حل کریں تو اور مثالوں کی حل کر نہیں
 پڑی آسانی ہو جاوے گی۔

(۵۳۱) مثال (۲) فرض کرو کہ خط منحنی دو چند خدار پیدا ہوتا ہے تقاطع کرنی
 ایک مخروط اور مجسم قریب البیضوی جنکا راس ایک دوسری سطح پر منطبق ہے
 اور محور مخروط کا عمود محور مجسم قریب البیضوی پر ہی مساوات محدود کی ہے
 $لا + ۲ = ی + ع$ موافق (۴۶۸) کی



اور مساوات مجسم قریب البیضوی
 کی یہ ہو گی $لا + ع = ی + ن$ (۴۶۹)

بیانسی معلوم ہوتا ہے کہ $لا$
 نشان سطح $لا + ع$ پر ہے

$لا + ن = ی + ع$ اور یہ مساوات بعید البیضوی کی ہے جبکہ
 محور $ن$ اور $ی$ $\frac{ن}{ی + ع}$ ہیں موافق فقرہ (۱۵۷) کی اور ظاہر ہے کہ
 $لا + ۲ = ی + ع$ اور $لا = ی + ع - ۲$ (۱ + ی) $لا = ی + ع - ۲$
 بیانسی ثابت ہوا کہ نشان سطح $لا$ پر ایسی بیضوی ہے جنکا راس $لا$
 ہی اور محور $ی$ $ن$ اور $ی$ $\frac{ن}{ی + ع}$ موافق (۱۰۳) اور مساوات
 اوس نشان کی جو سطح $لا + ع$ پر ہو گا یہ ہے $(لا + ع + ۲) + ن + ۲$
 $ی + ن + ع$ اور یہ مساوات لپٹکیا کی ہے اور یہی مساوات اوس
 لپٹکیا کی ہوگی جو برنولی صاحب نے ایجاد کیا ہے جبکہ $ی = ۱$

یعنی جبکہ محوطہ فایده را در ہی موانع (۳۱۴) کی

(۵۳۶) دریافت کرده خط منحنی جو تقاطع کرنی دو سطح منحنی کیسی پیدا ہوتا ہے

— پہلی اس سی ہنی مقادیر غیر منقطع کو دور کر کی مساواتیں نشان کی سطوح ادا

پر حاصل کی تھیں برعکس اس کی اگر ملا دین ان مساواتوں کو بوسیلہ جمع کرنی یا

کرنی وغیرہ کی تو ظاہری کہ اس عملی محکوم ایک ایسی مساوات حاصل ہوگی

جس میں تین مقدار مجہول یا غیر منقطع بائی جادنگی اور ایسی ایک ایسی سطح منحنی

حاصل ہوگی جس پر ایک خط منحنی دو چند ہوا کہنے سکتی ہیں — اس سطح منحنی

پر لایات خطوط منحنی ہوا کہنے سکتی ہیں اور مساوات سطح منحنی کے ہر ایک خط

ان خطوط منحنی سی صادق اویکی — نتائج مذکورہ بالا جو ملائی مساواتوں

کیسی حاصل ہوتی ہیں بہت فایده مند اور دلچسپ ہیں ایسا اسطی ہم اسجا

چند مثال اونی لکھیں گے مثلاً فرض کرو کہ خط منحنی پیدا ہوا ہی تقاطع کرنی

قرب البیضوی دار استوائہ را اور یہہ لاکہ برداقہ ہی (اور دایرہ دار استوائہ

سی جو لاکہ برہی اور نقطہ شروع زاہس قرب البیضوی برہی اور مرکز

دایرہ کا محور قرب البیضوی برداقہ ہی اور یہہ محور لاکہ برہی ہی فرض کرو

۱ = ۲ مساوات قرب البیضوی وقت کی لاکہ برہی اور

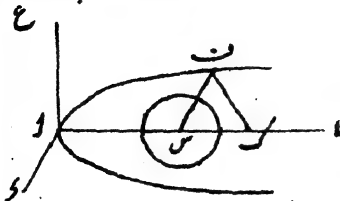
(۵ - ط) + ۲ = ۲ فی مساوات دایرہ کی سطح لاکہ برہی

جبکہ ملا دین ہم ان مساواتوں کو بوسیلہ جمع کرنی کی تو حاصل ہوگا

بہ (۵ - ط) - ۲ = ۲ ن لا + ۲ = ۲ فی یا

$$(1-p-n) = 2 + 2 + 2 = 6 \text{ ن} + 2 + 2 + 2 \text{ ن} \text{ مساوات ۱}$$

ع



کره کی چسکا مرکز نقطہ شروع

آبسی قاصد اک $(=n+p)$

بر واقع ہی اور بعد خط محور آلا

بر شمار کیا گیا ہی اور ظاہر ہی کہ ن - تعبیر کرتا ہی خط پائین سرک نقطہ

کو اور ق س د و تر جہ تہا ہی نقطہ س بر موافق (۲۴۲) کی یہاں سی

ثابت ہوا کہ تمام نقطہ منحنی دو چند خمدار کی واقع ہیں اور سطح کرہ بر چسکا

مرکز ایک سر خط پائین ایک خاص نقطہ ایسی قریب البیضوی کا ہی

چسکا و تر مرکز دائرہ مفروض میں سی گذرنا ہی

(۵۳۳) واضح ہو کہ تقاطع کرنی سطح منحنی سی یہ خطوط منحنی و چند

خمدار پیدا نہیں ہوتی ہیں و اگر خطوط منحنی سطح ہوتی ہیں - اب ہم

بان کر نیکی ایک ایسی ترکیب کو جسکی وسیلہ سی مساوات اون خطوط

منحنی سطح یک دریافت ہو جاوے گی جو تقاطع کرنی سطح منحنی سی پیدا ہوگی

میں اور جن صورتوں میں خطوط منحنی دو چند خمدار حاصل نہیں ہوتی ہیں -

پوشیدہ نہ رہی کہ جب ایک خط مستقیم ان کسی خط کا ہوتا ہی تو خود

خط منحنی دو چند خمدار نہیں ہوتا ہی

مثال - فرض کرو کہ خط منحنی پیدا ہو اھی تقاطع کرنی دو قریب البیضوی

دار استوائی سی نیکی مساوات بہہ ہیں $\text{لا} = \text{طع}$ اور $\text{ص} = \text{لا}$

۱۰۴
 جبکہ دو لایہ کو ان دونوں مساواتوں میں سے تو حاصل ہو گا یہہ ص ۱ = طع
 یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ نشان اس کا سطح و ع پر ایک خط مستقیم ہی
 اور جو کہ ہم ابھی لکھ چکے ہیں کہ خط مستقیم نشان خط منحنی دو چند خود کار کا ہے
 ہوتا ہے تو اس سے معلوم ہوا کہ فصل مشترک یعنی وہ خط منحنی جو تقاطع
 کرنی استوائوں مذکور سے پیدا ہوا ہے خط منحنی سطح ہی -
 (۵۳) اور اگر ہم مساواتیں نشانوں کی اس طرح پر ملا دیں کہ اولیٰ
 مساوات سطح کے حاصل ہو تو خط منحنی جبکہ نشان اوس سطح پر
 کہنی کیا ہے ایک خط منحنی سطح ہو گا -
 مثلاً فرض کرو کہ خط منحنی پیدا ہوا ہے تقاطع کرنی دو قریب البعض
 استوائوں سے جسکی مساواتیں یہہ ہیں لا^۲ = طع اور
 ص ۱ = لا^۲ + س لا جبکہ لکھیں ہم مساوات دوم میں طع بجای
 لا کی تو حاصل ہو گا یہہ ص ۱ = طع + س لا اور چونکہ یہہ مساوات
 ایک سطح کے ہی تو ظاہر ہے کہ خط منحنی ایک خط منحنی سطح ہو گا
 (۵۴) واضح ہو کہ اسطرحی دریافت کرنی خطوط منحنی سطح کے ایک اور طریقہ
 آسان ہے مثلاً جبکہ دور کریں ہم دو مساوات سطوح منحنی میں سے ایک
 مقدار غیر منقطع سطح کو تو ظاہر ہے کہ ہلکو حاصل ہوگی ایک
 مساوات جسکی صورت یہہ ہوگی ۷ (لا اور ۱) = ۰ اب اگر خط منحنی
 ایک سطح ہو تو ظاہر ہے کہ وہ پیدا ہوئے تقاطع کرنی ایک سطح منحنی کے

(دو سطح منحنی میں کسی) اور ایک ایسی سطح مستوی کی جبکی مساوات

یہ ہے $ع = م + لا + ن + د + ف$ دور کرد مقدار $ع$ کو بوسیله اس مساوات

اور مساوات ایک سطح منحنی کے تو ظاہری کہ اس عمل سے یہ مساوات

حاصل ہوگی کہ $(لا اور د) = ۱۰$ اور ہمیشہ اس صورت کی ہوگی

$۷ (لا اور د) = ۱۰$ اس واسطے بوسیله مقابلہ کرنی ان دونوں جنوں کی

میں حاصل ہونے کی مختلف مساواتیں جنکی ذریعہ سے ہم کو فہمین مفادیرم

اور ن اور ف کی دریافت ہو جاوے گی اور ظاہری کہ یہ مفادیر کو

کرنیکی شرطیں ان مساواتوں کی ضمن میں پائی جاوے گی اور اگر وہ شرائط نہ ہو کر

پورا کریں تو خط منحنی مطلوب خط منحنی دو چند ہوا کا - مثلاً فرض کرو کہ ایک

کرہ اور ایک استوانہ تقاطع کرتے ہیں ایک دوسرے سے جب کہ (۵۳۰) ہیں

تو اب ظاہری کہ مساوات کرہ کی یہ ہوگی $لا + د + ع = ط$ (۱)

اور مساوات استوانہ کی یہ ہے $(لا - س) + د = ح$ (۲)

اور مساوات سطح مستوی کی یہ ہے $ع = م + لا + ن + د + ف$ (۳)

جبکہ دور کیا ہنی $ع$ کو مساوات (۱) اور (۳) میں سے تو

کہ $(لا اور د) = ۱۰$ یہ ہو جاوے گا

$(م + لا + ن + د + ف) + د + م + لا + د + م + لا + د + ف = ط$

$(۱ + لا + ن + د + ف) + د + م + لا + د + م + لا + د + ف = ط$

$(۱ + لا + ن + د + ف) + د + م + لا + د + م + لا + د + ف = ط$

$(۱ + لا + ن + د + ف) + د + م + لا + د + م + لا + د + ف = ط$

$(۱ + لا + ن + د + ف) + د + م + لا + د + م + لا + د + ف = ط$

لیکن شرط م = سہی اشال لا کا (۴) میں جاتا رہا ہی اور اسی معلوم
ہو نہای کہ مساوات (۴) مشابہ (۲) کی نہیں ہو سکتی ہی تو اب ثابت ہوا
کہ خط منحنی مطلوب خط منحنی دو چند خمدار ہی —

اب فرض کرو کہ مساوات استوائی کے یہی لاء و گ = ص تو اب م = ۰

اور ن = ۰ سہی مساوات (۴) مشابہ (۲) کے ہو جاتی ہی تو

اب ظاہر ہی کہ خط منحنی ایک خط منحنی سطح مقیم اوس سطح میں ہو گا جسکی

مساوات یہی ع = مخاطب ص ۲ اور یہ بند سہی ہی معلوم ہوئی

(۵۳۶) دریافت کر دہ خط منحنی جو مساواتوں آئندہ سہی تعبیر ہوئی

$$\frac{ط}{ع} + \frac{س}{ع} = ۱ \text{ اور } \frac{ط}{و} + \frac{ص}{و} = ۱$$

یہ دو مساواتیں دو بعید البغوی دار استوائی کی ہیں قاعدہ ایک کا انہیں

سہی سطح لاء میں واقع ہی اور دوسرے کا سطح لاء میں ہی موافق قعر

(۲۰۹) کی شال (۳) کی شکل مرقومہ ذیل میں بعید البغوی رس سطح

لاء میں واقع ہی اور مرکز اسکا

و بری اور بعید البغوی طک

سطح لاء میں واقع ہی لا

اور مرکز اسکا نقطہ بری اور

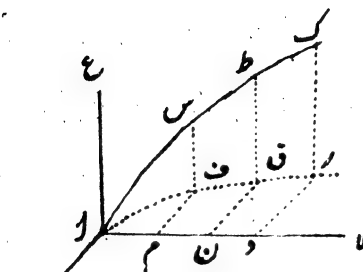
$\frac{ط}{و} = \frac{ص}{و}$ یا $\frac{ط}{و} = \frac{ص}{و}$ یہاں سہی معلوم ہو نہای کہ ن استوائی

نکات اور کا سطح لا و ہر ایک خط مستقیم و ہی تو اب ظاہر کہ خط منحنی

خط منحنی سطح ہو گا اور یہ تقیم ہو گا سطح $ع$ دن میں جو عمود لاکو پر ہی
(۵۳۷) چونکہ ہلکے بخوبی حال خط منحنی کا بوسیلہ معلوم ہوئی دو بعد البعضویہ
استوائی کی ظاہر نہیں ہو گا ایسا اسطی ہم مساوات خط منحنی کے سطح
 $ع$ دن یعنی اسی کی سطح میں دریافت کرنیکی فرض کر دکھتے ہیں نقطہ
خط منحنی کا ہی اور دم = لا اور م ق = ک اور ت ق = ع
تو اب واسطی معلوم کرنی اور نسبت کی جو درمیان وق (= ن)
اور ق ت = ع کی ہی ہم معلوم کرنیکی فیتن دم اور دن کی اجزا
وق میں اور بعد اسکی لکھیں گے ہم اسکو مساواتوں مفروض میں طاری
کر مساوات دن کی یہی

$ص = ط = لا = لا مسر$ (اگر $ص = مس$ رکھی فرض کیا جادی)
یہ دم = وق جم اور دن = وق جس واسطی صورت اس
مساوات کی $ط = ع + ص = ا$ بہ ہو جادی کی $ن$ جم $ط = ع + ص = ا$
اور صورت اس مساوات کی $ص = ع + ط = ا$ بہ ہو جادی کی
 $ص = ع + ط = ا$ چونکہ $ص = ط$ مسر اور $ص$ جم $ط = ص$
اور ہر مساوات میں مادی ایک دوسری کی ہیں اور ہر ایک ان مساواتوں
میں سی خط منحنی مطلوب سی تعلق رکھتی ہے یہاں سے معلوم ہوتا ہے کہ
خط منحنی بعد البعضویہ ہی اور مساوات اسکی جبکہ مرکز نقطہ شروع
فرض کیا جادی بہ ہوگی $ن ع = ط = ص$ سوائے (۵۳۹)

(۵۳۸) کینچو خط منحنی دو چند خدا کو بوسید اوسکی نقاط کی فرض کرو



۷ (لا اور ی) = ۱۰ اور

ک (لا اور ع) = ۰ دو

شان خط منحنی مذکور کی پیر

کینچو خط منحنی آف ق ر

سطح لا و پر جبکی مساوا

پیر ہی ۷ (لا اور ی) = ۰ واسطی ہر ایک قیمت لا یا لام کی ہکو

ایک قمرم ق یا تو دریافت ہو جادیکا اور اسی طرح مساوات

ک (لا اور ع) = ۰ سی ہکو قیمت ع کی دریافت ہو جادیکی اب کینچو

نقطت سی ق س عمود سطح لا و پر او قطع کرو اسکو مساوی ع

کی تو نقطت س ایک نقطہ خط منحنی مطلوب کا ہوگا اسی طرح عمل کرنا

ہکو مختلف نقاط س اور ط اور ک وغیرہ دریافت ہو جادینگی

بہ نظام ہی کہ اگر کسی ایک خاص قیمت لا اور تو سی قیمت ع کی

ناممکن ہو جاد ہی تو ظاہری کہ کہی حصہ خط منحنی کا موافق ایسی قیمتوں

لا اور تو کی معلوم نہیں ہوگا اور اگر ع منفی ہو تو ق س بھی سطح لا و

کی کینچا چائی —

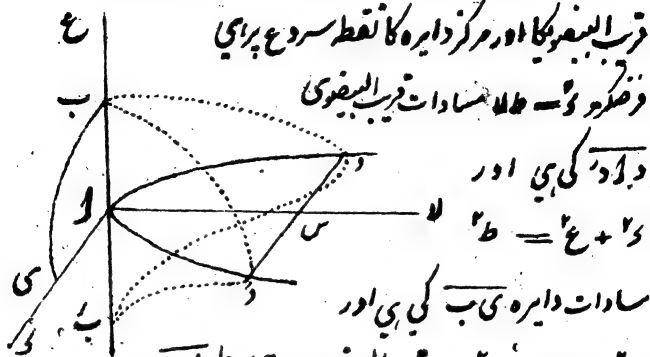
(۵۳۹) فرض کرو کہ خط منحنی پیدا ہو تا ہی و تمام طع کرنی قریب البعضہ دار

استوائہ سی جو سطح لا و میں واقع رہی اور دایرہ دار استوائہ سی

جوش سطح بیج بین داتج ہی اور بحر عمود ایک دوسری پرہین اور اس

قرب البیضویکا اور مرکز دایرہ کا نقطہ شروع ہوا

وضوہ و - ط لا مساوات قریب البیضوی



د و د کی ہی اور

د + ع = ط

مساوات دایرہ بیج کی ہی اور

ع + ط لا = ط وہ قریب البیضوی ہی جوش سطح لا بین

داتج ہی وضوہ و ب = ط اور ل س = ط اور مان لو کہ د س د = ط

اب ظاہری کہ واسطی کینچہ خط منحنی کی ہمیں تین مساواتیں سطوح اوتاری پر

حاصل ہونگی ع = ± ما ط (ط - لا) اور ع = ± ما ط - ع = ± اور

د = ± ما ط لا اگر لا = ۰ تو د = ۰ اور ع = ط ± خط منحنی نقطہ

ب بین سی گذرے گا اور جیسا کہ لا زیادہ ہوگا او سب قدر زیادہ ہوگا اور ع

کم ہوگا اور جب لا = ط تو د = ط اور ع = ۰ اسی معلوم ہوتا ہے کہ

خط منحنی بلند ہی میں کم ہوتا جاتا ہے نقطہ ب سی ضی کہ وہ منہا ہی قریب

البیضوی سی نقطہ د پر اسی نقطہ دار شاخ ب د معلوم ہونے ہی اگر

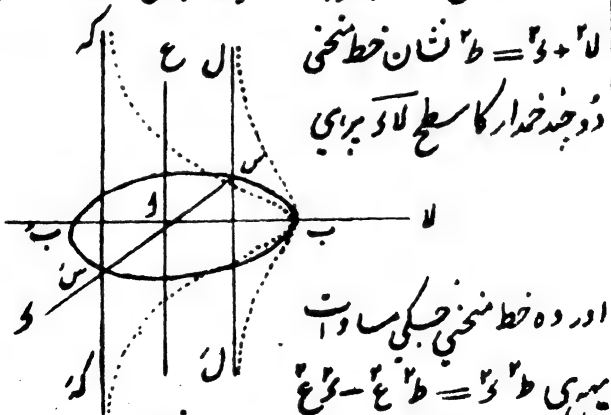
لا زیادہ ہوگا سی تو ظاہری کہ ع ناممکن ہوگا دیکا اسی معلوم ہوتا ہے

کہ خط منحنی پری نقطہ د کی نہیں ملتا ہے چونکہ ع = ± ما ط (ط - لا)

تو اسی معلوم ہوتا ہے کہ سوای اوس دتریکے جو حاصل ہوتا ہے ہوگا

فرض کریں قیمت لا کی درمیان - اور ط کی ایک اور دہری جو مقابل قدر
 مذکور کی اور ایسی ظاہر ہوتا ہی کہ سوای شاخ ب د کی ایک اور شاخ
 ب د خط منحنی کے ہی مگر نئی سطح لا کی واقع ہی - اور چونکہ
 فرض کرنی معنی قیمت تو کی قیمت ع میں کسی نوع کا فرق نہیں آتا
 تو ایسی معلوم ہوتا ہی کہ ب د ب ایک اور شاخ منحنی کی ہی اور یہ
 شاخ ب د د کی ہی - اب ثابت ہوا کہ خط منحنی مرکب ہی
 چار شاخ ب د اور د ب اور ب د اور د د جو ساری ایک
 کی ہیں اور یہ کھینچا گیا ہی سطح فریب البیضویہ استوائیہ پر جس کا قاعدہ
 د د ہی ہے شاخیں حقیقت میں ایک شکل مثل البیضویہ کی بنی
 ہیں جس کی سطح جھکی ہوئی واسطی ملنی استوائیہ کی ہی -

(۵۴۰) مثال (۲) فرض کرو کہ وہ دایرہ جسکی مساوات پہلی



ایک نشان سطح کوع پر واقع ہے اب درست کیا جاتی ہیں ہم

خط منحنی انکا - فرض کرو بس بس، ایک دایره سطح لاؤ پری
 جسکی مسادات بہی $لا + و = ط$ اور چونکہ مسادات سطح کو
 بر بہی $ط کو = طع - کو$ نو مسادات $لاع$ بر بہی ہوگی
 $لاع = ط - ط لا = ع = ط - ط لا - ط - ط لا$
 $لاع = ط - ط لا = ع = ط - ط لا - ط - ط لا$
 اور $ک = ط - ط لا - ط - ط لا$
 اگر $لا = ط$ اور $لا = لا$ ثابت - اسی معلوم ہوتا
 کہ خط س ل جو نقطہ س میں سی گذرتا ہی خط متفرع الا قات
 خط منحنی کا ہی اور جب کہ لا زیادہ ہوتا ہی اوسے قدر ک کٹتا ہی
 اور $ع$ ہی کم ہوتا ہی تو اب ظاہر ہی کہ خط منحنی پاس آتا ہی سطح
 لاؤ کی اور اگر $لا = ط$ تو $ک = ط$ اور $ع = ط$ اسی معلوم ہوتا ہی
 کہ خط منحنی نقطہ ب میں سی گذرتا ہی اور اگر لا زیادہ ہو $ط$ سی تو ک
 اور $ع$ ہر واحد نامکن ہونگی اسی ظاہر ہوتا ہی کہ کوئی حصہ خط منحنی کا
 بری نقطہ ب کی واقع نہیں ہی اور چونکہ اسطی ہر ایک قیمت کو کی دو
 قیمتیں $ع$ کی حاصل ہوتی ہیں تو اسی ثابت ہوتا ہی کہ ہر سیدہ تمام
 قیمتوں کو کی جو ربع دایره اس بین ہیں دوسا ہی شاخیں
 لب اور ب ل حاصل ہونگی اور یہ مقابل ایک دوسر کی ہونگی
 اسطی دوسا ہی شاخیں کہ ب اور ب کہ ربع دایره
 ب اس میں حاصل ہونگی اور چونکہ اسی ہی قیمتیں کو اور $ع$

۸۴
 نہ
 کی حاصل ہونگی جبکہ لا منفی فرض کیا دے تو اسی چار سو سی شاخین
 حاصل ہونگی اور یہ مقابلہ اونکی ہونگی جو ابھی تین گنہی ہیں اور یہ
 شاخین بوسیدہ نصف دایرہ سے بے س کی حاصل ہونگی۔
 واضح ہو کہ یہ دو مثالیں کلیرٹ صاحب کی اس رسالہ سی ای گئی
 ہیں جو اسنی خطوط منحنیہ و چند خداری کے بیان میں لکھا ہے اور اس رسالہ
 میں بہت سی مثالیں اس قسم کی ہیں اور بہت سی خواص ان
 خطوط منحنیہ کے یہی بیان کیے گئے ہیں۔ — نقطہ —

صفحہ	طر	عقلم	صحیح
۴	۹	ط ص	ط ص
۵	۴	ط اور ص	ط اور ص
۶	۶	ط + ط	ط x ط
۷	۷	ط =	ط =
۸	۱۶	ط + ص x ص	ط x ص x ص
۹	۱۶	ط + ص x ص	ط x ص x ص
۱۰	۱۸	لئے خطوط	خطوط
۱۱	۱۰	۱۴ دن تک	۱۴ دن تک
۱۲	۱۰	حد ہی	خط ہی
۱۳	۱۳	جسم	قسم
۱۴	۱۴	توجہ اصغر کہ جسم آسی	جو قسم اہل رکبہ قسم اصغر سے
۱۵	۱۱	ص =	ص =
۱۶	۱۳	نسبت میں	نسبت
۱۷	۹	قبل ازین	قبل از
۱۸	۲	توہ عمود مساوی نصف قطر	توہ عمود مساوی نصف نصف قطر
۱۹	۱۸	ہندسی کے	ہندسی سے
۲۰	۱۰	مک	مک
۲۱	۹	ق اور س	ق اور س
۲۲	۱۸	ص =	ص =
صفحہ (۱۶) کی شکل میں بجای کے ق اور بجای کے ق کے لکھو			
۲۳	۱۵	ط ۳ لا	ط ۳ لا
۲۴	۴	ب سے	ب سے
۲۵	۱۲	بطور اول خرفقہ	بطور اول خرفقہ
۲۶	۱۸	نقشہ	نقشہ
۲۷	۸	فرض کرو کہ	فرض کرو کہ
۲۸	۱۸	(و-ص) ۲ (لا-ط) ۲	(و-ص) ۲ (لا-ط) ۲
۲۹	۳	کی ایسی پوری	کی ایسی پوری

قوائیدہ
 ایک خاص نقطہ پر نشان عظیم کر لین
 شروع سفر
 نقطہ آ سے
 تم سے
 آ سے طرف
 $۰ = ۲ + ۰$
 فاصلہ
 اور ق ر
 سرچینی برعکس اسکی دہسلی
 خط د ب
 اور سمت میں حسین
 $۰ = ۵ - ۵$
 کی پ = ۲
 آ اور پ
 ایسی نہیں
 کر شرط سوال
 ہم ہمیشہ
 کام میں نہیں
 لاسکتے ہیں مثل $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} = ۱$
 نص = ۵ - ۵ ط لا
 $\frac{۱}{۲} = ۵$
 $۵ - ۵ = ۳$

اور آئندہ	۹	۲۳
ایک خاص سیدہ یا نشان	۲	۲۵
شروع سفر	۱۴ و ۱۵	=
نقطہ آ	۳	۲۶
م - آ سے	۸	=
آ طرف	۱۵	=
لا + ۵ = ۰	۲	۲۸
فاصلہ	۱۴	=
اور ط ر	۱۰	۲۹
کر چکی دہسلی	۸	۳۱
خط د ب	۲	۳۵
اور سمت حسین	۵	=
۵ = لا = ۰	۶	=
کی پ = ۲	۱۳	=
آ اور پ	۱۴	=
ایسی نہیں	۱۳	۳۶
کر سوال	۴	۳۷
ہم ہمیشہ	۱۲	=
کام میں بھی	=	=
لا سکتے ہیں	=	=
نص = ۵ - ط لا	۱۸	=
$\frac{۱}{۲} = ۵$	۱۳	۳۹
۵ - ۵ = ۳	۲	۴۰

مفروضہ	مفروضہ سے	۱۱	۴۰
- مم ۱ س لا	- مم دس لا	۶	۴۳
عمود و کئی	عمود و وی	۱۸	=
فمن کرو کہ پ = ۱۰	فمن کرو کہ پ = ۱۰	=	=
اوتار نقطہ آ	اوتار نقطہ و	=	=
ہر ایک نقطہ سے کہ پ	ہر ایک نقطہ سے کہ پ	۱۸	۴۴
س آ پ	س آ پ	۱	۴۵
اور اب د۱ = د۱ جس د۱ ۱	اور اب د۱ = د۱ جس د۱ و	۲	=
اور جس د۱ ۱	اور جس د۱ و	۳	=
۵ د۱	۵ د۱ و	۴	=
خط مفروضہ سے آ	خط مفروضہ سے د۱ و	۵	=
تو اب د۱ = د۱ جس د۱ ۱	تو اب د۱ = د۱ جس د۱ و	۱۱	=
جس د۱ ۱	جس د۱ و	۹	۴۶
لا ۱ لا - لا ۱ لا =	لا ۱ لا - لا ۱ لا =	۱۰	۴۷
۵ = ط لا + ص	۵ = ط + ص	۱۲	۴۸
لا ۲ اور کہ اوتار نقطہ سے کی ہیں	لا ۲ اور کہ سے	۳	۴۹
۵ - ۱ = ۱ - ۱	۵ - ۱ = ۱ - ۱	۱۵	۵۰
اوتار نقطہ شروع آ کے ہیں	اوتار نقطہ شروع آ کے ہیں	۱۲	۵۱
+ ف لا x	+ ف لا x	=	=
+ ۵	+ ۵	=	=
+ ۵	+ ۵	۱۴	=
+ ۵ جس ر	+ ۵ جس ر	۱	۵۲
یا کہ = ۹۰	یا کہ = ۹۰	۲	=
۵ = لا جس ر + ۵ جس ر	۵ = لا جس ر + جس ر	=	=
لا = لا جس ر - ۵ جس ر	لا = لا جس ر + ۵ جس ر	=	=
+ ۵ جس ر ۵	+ ۵ جس ر ۵	۶	=
+ ۵ جس ر ۵ + ۵ جس ر ۵	+ ۵ جس ر ۵ x ۵ جس ر ۵	۷	=
اور اگر نیا	اور اگر نیلی	۱۳	=

۵۲ ۱۵ مین واسطی کوہ واسطی
(۵۳) منفرہ کی شکل میں خط س ق پر حرف س ق و لکھو اور اس میں بجائی میں کم اور بجا کر کے

ک = ۱۸۰	ک = ۱۸۰	۱۶	۵۲
(س-ص) جسک	(س-ص) جسک	۶	۵۴
$\frac{۱}{۲}$ تو جبر	$\frac{۱}{۲}$ جبر	۱۲	=
ر = جس - لکھو	ر = جس - لکھو	۱۲	=
۲۵ = ۵+	۲۵ = ۵+	۱۵	=
بس ہی دایرہ	بس دایرہ	۱۶	=
- ۱۲۱	- ۱۲۱	۳	۵۹
۳ = ۳	۳ = ۳	۴	۱۱
$\frac{۱۲-۱۵}{۳-۲} = ۳$	$\frac{۱۲-۱۵}{۳-۲} = ۳$	۴	۱۲
۶۰ = ۶۰	۶۰ = ۶۰	۶	=
$\frac{۱}{۳} = ۳$	$\frac{۱}{۳} = ۳$	۹	=
خط ط س پر	خط ط س	۱۸	=
(لا-لا)	لا-لا	۱۲	۶۳
کی ہو جادگی	کی ہیں ہو جادگی	۱۳	۶۲
$\sqrt{۲+... (۲-۲-۲-۲)}$	$\sqrt{۲+... (۲-۲-۲-۲)}$	۶	۶۸
$\sqrt{۲+... (۲-۲-۲-۲)}$	$\sqrt{۲+... (۲-۲-۲-۲)}$	۹	=
$(\frac{۲}{۳} +)$	$(\frac{۲}{۳} +)$	۹	۶۶
اور ۳	اور ۳	۱۰	=
$\frac{۲}{۳} = ۳$	$\frac{۲}{۳} = ۳$	۱۵	۶۶
ص	ل	۲	۶۹
ص	ل	۳	=

اور اس صفحہ کی شکل میں بجائی و جوہر اس میں بنوئی پر لکھا ہو اسی را کہنا چاہئے -

ق ق	ق ق	۱۷	۶۹
کو دوسی	کو دوسی	۸	۷۰
ک + ص	ک + ص	۱	۷۲
ک + لا	ک + لا	۱۸	۷۳
ک = ط + ص	ک = ط + ص	۱۵	۷۵
کبھی نہیں ملتا	کبھی ملتا	۱۵	۷۶
مقام پر	مقام پر	۲	۷۸
ک + لا = ۰	ک + لا = ۰	۵	۷۹
سادات عام میں	سادات عام	۱۵	۸۰
جس + ۰۰۰۰	جس + ۰۰۰۰	۸	۸۱
جس = ۰	جس = ۰	۹	۸۲
مطابق وتر	مطابق تر	۱۷	۸۳
کلاطاق ہے	کلا ہی	۱۸	۸۴
ک جس	ک جس	۴	۸۵
ک اور لا	ک اور لا	۵	۸۶
ب لا ک	ب (لا ک)	۷	۸۷
ک + جس (ک + ف)	ک + جس (ک + ف)	۸	۸۸
(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲	(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲	۲	۸۹
(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲	(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲		

صفحہ (۸۷) میں شکل (۲) اور (۳) میں مرکز بیضوی پر حرف لکھنا چاہئے اور صرف شکل (۳) خط آتے عمود کھینچ کے اوپر آئل لکھنا چاہئے اور جہاں کہ محور آئل اور آئیجے بیضوی کو تقاطع کرتا ہے، حروف تہ ادر اس فنڈرچ کرو

آؤ	آؤ	۶	۸۸
ک + ص	ک + ص	۱	۸۹
ک + لا	ک + لا	۷	۹۰
ک = ط + ص	ک = ط + ص	۱۲	۹۱
کبھی نہیں ملتا	کبھی ملتا	۱۵	۹۲
مقام پر	مقام پر	۲	۹۳
ک + لا = ۰	ک + لا = ۰	۵	۹۴
سادات عام میں	سادات عام	۱۵	۹۵
جس + ۰۰۰۰	جس + ۰۰۰۰	۸	۹۶
جس = ۰	جس = ۰	۹	۹۷
مطابق وتر	مطابق تر	۱۷	۹۸
کلاطاق ہے	کلا ہی	۱۸	۹۹
ک جس	ک جس	۴	۱۰۰
ک اور لا	ک اور لا	۵	۱۰۱
ب لا ک	ب (لا ک)	۷	۱۰۲
ک + جس (ک + ف)	ک + جس (ک + ف)	۸	۱۰۳
(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲	(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲	۲	۱۰۴
(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲	(۱ - ۲) (۱ - ۲) + ۲		

۹۱	۱۱	حرف دومی	حرف ایکم
		فقہ (۱۸) پر یہ نشان * کرنا چاہی	
۹۲	۱۱	۱ ی +	۱ ی +
۹۳	۱۴	۵ لا	۵ لا
=	۱۸	۱ م +	۱ م +
۹۵	۴	-۱۲ لا = ۰	-۱۲ لا = ۰
=	۶	اور ص = ۱ = ۰	اور ص = ۱ = ۰
=	۱۱	اور ق = ۹ +	اور ق = ۹ -
		فقہ (۹۰) پر یہ نشان * کرنا چاہی	
۹۸	۱۶	۱۲ + حبر رجم	۱۲ + حبر رجم
۱۰۰	۹	د۷ - ی ۷ ص	د۷ - ی ۷ ص
=	=	۱ م +	۱ م +
=	=	ی = د۷ ص + ی ۷	ی = د۷ ص + ی ۷
=	۱۵	۱۲ + م + لا + ذ	۱۲ + ذ
۱۰۱	۱	کر دو باتین	کر دو باتین
		فقہ (۹۶) پر یہ علامت لکھنے چاہی * اور صف (۱۰۱) کا شکل (۳) کی اس قدر ایضاً حرف ۱۰۱	
۱۰۲	۱۸	جو قوت	جو قوت
۱۰۳	۹	جہم کر	جہم کر
=	۱۴	ایض	ایض
=	۱۶	اسر طر میں قوت د میں سے جز + ی ۷ ص جسرا کر د کرنا چاہی	
۱۰۴	۱۶	۱۲ + م + لا + ذ	۱۲ + ذ
۱۰۵	۲	ص کے	ص سے
=	۴	۷ + ص	۷ + ص
=	۶	مساد کد شند	مساد کد شند
=	۷	۷ - لا	۷ - لا
=	۸	ص - ۷	ص - ۷

صفحہ	صفحہ	صفحہ	صفحہ
صفحہ (۱۰۸) کی سطر (۱۰) میں تمام مساوی کہ جس پر علامت جذر کی کرنی چاہی یعنی			
$\sqrt{لا^2 + ص^2} = \sqrt{لا^2 + ص^2} = \sqrt{لا^2 + ص^2}$			
۹	۱۰۹	مرجع ۱ ط	مرجع ۱ ص
۱۰	=	۱ ط	۱ ص
۱۱	=	دو خطوں	دو حصوں
۱۲	۱۱۰	وتر العرض	وتر
۱۳	۱۱۱	ایک نقطہ پر ایک دو	ایک نقطہ پر دو
=	=	ایک وتر العرض	ایک وتر
۱۴	=	شکل ل میں ن	شکل ل میں ن
۱۵	=	لا ط ص	لا ط ص

صفحہ (۱۱۱) کی شکل بیضوی میں بجای کے کہ کعبہ اور دست ماست کی کہ دو مرکز بنائے

۱۱۲	۳	ص ن = ن	ص ن = ن
=	۱۸	اے	اے
۱۱۳	۴	(ص - لا) ۲ + ص ۲	(ص - لا) ۲ + ص ۲
=	۶	ص ۲ = ص ۲	ص ۲ = ص ۲
=	۱۲	لوکس اسکا بیضوی میں جگا	لوکس اسکا بیضوی میں جگا
۱۱۵	۹	چوٹا ہی ط	چوٹا ہی ط
۱۱۶	۱۲	ص ۲ +	ص ۲ +
۱۱۸	۲	جگہ - ک	جگہ - ک

صفحہ (۱۱۹) کی شکل میں حرف ص مرکز بیضوی پر لکھنا چاہئے یعنی درمیان نقطہ ص اور م کے درمیان

ص لکھو	ص لکھو	ص لکھو	ص لکھو
۱۲۰	۲	ی - ح لاد	ی - ح لاد
=	۵	اور لا = ط کے	اور لا = ط کے
=	۸	ص لکھو ط	ص لکھو ط

۱۲۰	۹	=	ط ص (ط + ی لا)	=	ط ص (ط + ی لا)	۱۲۰
			ط ص (ط + ی لا)		ط ص (ط + ی لا)	
	۱۱	=	ط ی لا		ط ی لا	
۱۲۱	۳		(ج کے وتر - تن اور - بین)		(ج کے وتر - تن اور - بین)	۱۲۱
	۱۰	=	ط ص لا		ط ص لا	
	۱۱		اور ماس تن ط		اور ماس تن ط	۱۲۲
	۱۵		دایرہ سی سی		دایرہ سی سی	۱۲۳
۱۲۵	۱۱	=	ط ص لا + ط لا		ط ص لا + ط لا	۱۲۵
			ط ص لا + ط لا		ط ص لا + ط لا	

صفو (۱۲۰) کی شکل میں جہان نمود ماس قطع کرنا ہر محور کا نمودمان گ اور جہان نمود خود کو دین

کل لکھا جاوے

۱۲۶	۱۶	=	ص گ		ص گ	۱۲۶
			ص گ		ص گ	
			ص گ		ص گ	
۱۲۷	۸		انجام محور خود		انجام محور خود	۱۲۷
	۱۳	=	ط ص		ط ص	
	۱۶	=	ی لا		ی لا	
۱۲۸	۱۰		و ک + ص ک		و ک + ص ک	۱۲۸
۱۲۹	۲		+ ص (جہ) لا		+ ص (جہ) لا	۱۲۹
	۶	=	ی ی		ی ی	
	۱۱	=	خط ص آست		خط ص آست	
	۱۶	=	محور ہو سکتے ہیں		محور ہو سکتے ہیں	
۱۳۰	۹		+ ص (جہ) لا		+ ص (جہ) لا	۱۳۰
	۱۰	=	ص (ط + جہ) لا + ص (جہ) لا		ص (ط + جہ) لا + ص (جہ) لا	
	۱۱	=	+ ص جہ رجم		+ ص جہ رجم	
	۱۲	=	بجای جہ کے		بجای جہ کے	

(ط ۲ - ص ۲)	(ط ۲ - ص ۲)	۲	۱۳۴
اقطار متجانس کا	کا اقطار متجانس کا	۶	=
{ جس (ز - ر) } ^۲	{ جس (ز - ر) }	۱۵	=
ص ن = لا	ص ن = لا	۱۴	۱۳۵
د ن = کو	د ن = کو	=	=
{ مثلث ن ص م اور مثلث د ص ن }	{ مثلث ن ص م اور مثلث د ص ن }	۱۷	=
ط ۲ کو	ط ۲ کو	۴	۱۳۶
اس صفحہ کی شکل میں اس جگہ جہاں ص ط قطع کرتا ہے یعنی کو د ان حرف د لکھنا چاہئے اور جہاں عمود ن ط قطع کرتا ہے محو کر کے کو د ان حرف لکھنا چاہئے			
ہو سکتے ہیں	ہو سکتے	۱۲	۱۳۷
قطر متجانس کسی قطر کا ایسا	قطر متجانس کے کسی قطر کا ایسا	۵	۱۳۷
ہی جو کہ مرکز	خط ہی کہ مرکز سے		
ماسون سے ہیں	ماسون کے ہیں	۱۷	=
مربع اور قطر متجانس	مربع اور قطر متجانس	۳	۱۳۸
اب اگر بیضوی کے	اب اگر بیضوی	۱۴	=
وتر ن کے ہیں	وتر ن کے ہیں	۱۵	=
ص ۲	ص ۲	۱۰	۱۳۹
ص ۲	ص ۲	۱۱	=
اس محل کے	اس محل کی	۱۸	=
ایک سی این	ایک سی این	۴	۱۴۰
اندر اوس	اور اوس	۱۷	=
بڑی سی بڑا ہی	بڑی سی بڑا ہی	۳	۱۴۱
ہم نے یہ	ہم نے یہ	۱۲	=
ع اور آ کے	ع اور آ کے	۱۲	۱۴۲

۱۳۲	۱۳	قطر محرک دن	قطر محرک دن
۵	۱۵	خط دلاست	خط رلا
۱۳۳ اول اس صفحہ کی شکل میں اس خط پر جو کہ پہنچا گیا ہے نقطہ آستے متوازی اوڑکے رلا کہو			
۵	۱۵	اور ک = ۱۰	اور ک = ۱۰
۱۳۴		(محم ۱۰)	(محم ۱۰)
۱۳		نونی =	نونی =
۱۵		ی + ی = ل	ی + ی = ل
۱۶		ل = ۱	ل = ۱
۱۳۸	۱۳	ط =	ط =
۱۵۰	۱۸	۱۲ ط + ص	۱۲ ط + ص
۱۵۱	۱۶	محرک کان کی بر	محرک کان کی بر
۱۵۲	۱۰	ی = ۵ ط	ی = ۵ ط
صفحہ (۱۵۳) کی شکل میں اس نقطہ پر کہ جو پیدا ہوا ہے تقاطع سے اور دھ سے اور دھ کی کٹاؤں سے پہلی کی کٹاؤں سے خط پر جو پیدا ہوا ہے			
۱۵۲	۱۷	۱۲ ط + ص	۱۲ ط + ص
۱۵۳	۱۳	توغ = ص	توغ = ص
۱۵۴	۱۰	ص لاؤ	ص لاؤ
صفحہ (۱۵۵) کی شکل میں اس نقطہ پر جو تقاطع سے اور دھ سے پیدا ہوا ہے حرف د کہو اور			
۱۵۵	۱۷	خط د رک	خط د رک
=	۱۸	ک ٹ	ک ٹ
=	=	اور د رک عمود	اور د رک عمود
۱۵۶	۱۳	خط د ص رک	خط د ص رک
۱۵۷	۷	بر ہی ہوگی	بر ہی ہوگی
=	۱۳	قیمت ص رک اور ص رک	قیمت ص رک اور ص رک

سطر	صفحہ	معرکہ	معرکہ
۱۶	۱۵۶	معرکہ = ط ص ۱ ص ۱	معرکہ = ط ص ۱ ص ۱
۱۷	۱۵۸	در یافت کرنے اور نقطہ تقاطع	در یافت کرنے اور نقطہ تقاطع
۱۸	=	قطر ص ۱ کے پی	قطر ص ۱ کے پی
۱۹	=	لا = ط ص ۲ - ط ص ۱	لا = ط ص ۲ - ط ص ۱
۲۰	۱۶۰	اگر ایک قطر ص ۱ شکل	اگر ایک قطر ص ۱ شکل
۲۱	=	قطر متجانس جو کہ	قطر متجانس جو کہ
۲۲	=	ص ۱ (جم ۲) ط ۲	ص ۱ (جم ۲) ط ۲
۲۳	۱۶۱	ص ۱ (جم ۲) ط ۲	ص ۱ (جم ۲) ط ۲
۲۴	=	ص ۱ (جم ۲) ط ۲	ص ۱ (جم ۲) ط ۲
۲۵	۱۶۲	ط ۱ ص ۱	ط ۱ ص ۱
۲۶	۱۶۳	شث دس - شث دس	شث دس - شث دس
۲۷	=	شث دس	شث دس
۲۸	۱۶۴	ہو کہ دس	ہو کہ دس

تمام فقرہ (۱۸۹) میں یکایک کے بابت لکھو

۸	۱۶۵	سرف ق و	سرف ق و
۹	=	اور کم ہو کا جادیکا	اور کم ہو کا جادیکا
۱۰	۱۶۶	قریب ہی خط	قریب ہی خط
۱۱	۱۶۷	سرف ق و	سرف ق و
۱۲	=	جبکہ لا	جبکہ لا
۱۳	۱۶۸	ص ۱ (جم ۲) ط ۲ - ط ۱ (جم ۲) ط ۲	ص ۱ (جم ۲) ط ۲ - ط ۱ (جم ۲) ط ۲

(۱۶۹) کی صفحہ میں جہان (۱۶۵) لکھا گیا ہے کہ جی جادوین بسطہ سطر میں غلط ہے

۸	۱۷۰	لا - لا	لا - لا
۹	۱۷۱	سرف ب	سرف ب

۱۷	۱۷	۱۷	۱۷
۱	۱	۱	۱
۲	۲	۲	۲
۳	۳	۳	۳
۴	۴	۴	۴
۵	۵	۵	۵
۶	۶	۶	۶
۷	۷	۷	۷
۸	۸	۸	۸
۹	۹	۹	۹
۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
۱۱	۱۱	۱۱	۱۱
۱۲	۱۲	۱۲	۱۲
۱۳	۱۳	۱۳	۱۳
۱۴	۱۴	۱۴	۱۴
۱۵	۱۵	۱۵	۱۵
۱۶	۱۶	۱۶	۱۶
۱۷	۱۷	۱۷	۱۷
۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
۱۹	۱۹	۱۹	۱۹
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
۲۱	۲۱	۲۱	۲۱
۲۲	۲۲	۲۲	۲۲
۲۳	۲۳	۲۳	۲۳
۲۴	۲۴	۲۴	۲۴
۲۵	۲۵	۲۵	۲۵
۲۶	۲۶	۲۶	۲۶
۲۷	۲۷	۲۷	۲۷
۲۸	۲۸	۲۸	۲۸
۲۹	۲۹	۲۹	۲۹
۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
۳۱	۳۱	۳۱	۳۱
۳۲	۳۲	۳۲	۳۲
۳۳	۳۳	۳۳	۳۳
۳۴	۳۴	۳۴	۳۴
۳۵	۳۵	۳۵	۳۵
۳۶	۳۶	۳۶	۳۶
۳۷	۳۷	۳۷	۳۷
۳۸	۳۸	۳۸	۳۸
۳۹	۳۹	۳۹	۳۹
۴۰	۴۰	۴۰	۴۰
۴۱	۴۱	۴۱	۴۱
۴۲	۴۲	۴۲	۴۲
۴۳	۴۳	۴۳	۴۳
۴۴	۴۴	۴۴	۴۴
۴۵	۴۵	۴۵	۴۵
۴۶	۴۶	۴۶	۴۶
۴۷	۴۷	۴۷	۴۷
۴۸	۴۸	۴۸	۴۸
۴۹	۴۹	۴۹	۴۹
۵۰	۵۰	۵۰	۵۰
۵۱	۵۱	۵۱	۵۱
۵۲	۵۲	۵۲	۵۲
۵۳	۵۳	۵۳	۵۳
۵۴	۵۴	۵۴	۵۴
۵۵	۵۵	۵۵	۵۵
۵۶	۵۶	۵۶	۵۶
۵۷	۵۷	۵۷	۵۷
۵۸	۵۸	۵۸	۵۸
۵۹	۵۹	۵۹	۵۹
۶۰	۶۰	۶۰	۶۰
۶۱	۶۱	۶۱	۶۱
۶۲	۶۲	۶۲	۶۲
۶۳	۶۳	۶۳	۶۳
۶۴	۶۴	۶۴	۶۴
۶۵	۶۵	۶۵	۶۵
۶۶	۶۶	۶۶	۶۶
۶۷	۶۷	۶۷	۶۷
۶۸	۶۸	۶۸	۶۸
۶۹	۶۹	۶۹	۶۹
۷۰	۷۰	۷۰	۷۰
۷۱	۷۱	۷۱	۷۱
۷۲	۷۲	۷۲	۷۲
۷۳	۷۳	۷۳	۷۳
۷۴	۷۴	۷۴	۷۴
۷۵	۷۵	۷۵	۷۵
۷۶	۷۶	۷۶	۷۶
۷۷	۷۷	۷۷	۷۷
۷۸	۷۸	۷۸	۷۸
۷۹	۷۹	۷۹	۷۹
۸۰	۸۰	۸۰	۸۰
۸۱	۸۱	۸۱	۸۱
۸۲	۸۲	۸۲	۸۲
۸۳	۸۳	۸۳	۸۳
۸۴	۸۴	۸۴	۸۴
۸۵	۸۵	۸۵	۸۵
۸۶	۸۶	۸۶	۸۶
۸۷	۸۷	۸۷	۸۷
۸۸	۸۸	۸۸	۸۸
۸۹	۸۹	۸۹	۸۹
۹۰	۹۰	۹۰	۹۰
۹۱	۹۱	۹۱	۹۱
۹۲	۹۲	۹۲	۹۲
۹۳	۹۳	۹۳	۹۳
۹۴	۹۴	۹۴	۹۴
۹۵	۹۵	۹۵	۹۵
۹۶	۹۶	۹۶	۹۶
۹۷	۹۷	۹۷	۹۷
۹۸	۹۸	۹۸	۹۸
۹۹	۹۹	۹۹	۹۹
۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰

صفحہ (۲۰۰) کی شکل میں خط درج انجام پر لا اور روشن کے انجام پر لا لکھو۔

۲۰۰	۲	ن = لا	ن = لا
۲۰۱	۴	کھنچا جاوے تو اب	کھنچا جاوے اور عود آس پر جو تو اب
۲۰۲	۶	کیونکہ ۵ = ۱ اور ۵ = ۱	(کیونکہ ۵ = ۱ اور ۵ = ۱)
۲۰۳	۷	۰ = ۵	ن = ۵
۵۴	۱۵	س = ۵	س = ۵
۲۰۶	۱	اور خط ک د	اور خط ک د
۶	۹	فرس کر و کر زادیہ ام = لا	فرس کر و کر زادیہ ام = لا
۲۰۸	۱۳	تو اب م = ۵	تو اب ع م = ۵
۶	۱۷	زادیہ کی کو	زادیہ کی کو
۶	۱۸	خط بنیادی	دتر آتشی اعظم
۲۰۹	۱۱	نو کر خط بنیادی	نو کر دتر آتشی اعظم
۶	۱۳	خط ان قریب البینوی	خط ان کو قریب البینوی
۲۱۰	۳	خط بنیادی	دتر آتشی اعظم
۶	۷	ہم کی	ہم کی
۶	۸	۰ = ۵	۰ = ۵
۲۱۰	۱۶	خط مسقیم	خط مستقیم

صفحہ (۲۱۳) کے فقرہ (۲۶۸) کی شکل میں لکھو ع بجای اوس نقطہ کے جو یہاں بجای تقاطع

سے اور کرت سے
صفحہ (۲۱۵) کی شکل میں انجام خط ہ کی کہ لکھنا چاہئے

۲۱۷	۱۱	نقطہ خط بیضوی پر	نقطہ خط بیضوی پر
۲۱۸	۱	طاؤ خط ہ آ اور ب د	طاؤ خط ہ آ اور ب د
۲۱۹	۲	دنگ اور لو	دنگ اور لو
۶	۳	اور پ د کو	اور پ د کو
۲۲۰	۴	خط ص د	خط ص د
۲۲۱	۱۶	ک کو	ک کو
۲۲۸	۱	قطر اس ہو تقاطع کرتا ہو	قطر اس ہو تقاطع کرتا ہو

نقرہ (۲۹۰) میں طبع ہوئی ہے

۲۳۶	۷	اول دو مقام	اول دو مقام
-----	---	-------------	-------------

۲۱۵۳۱

صغ (۳۳) کی شکل (۲) میں اوس نقطہ پر جو یہ دو امواسی لٹاؤں کے درمیان

۲۴۶	۲	طوبی	طوبی
-----	---	------	------

10. 1994

۱۲۸	الدریہ اور علم اسکا	اللہ نام اسکا
-----	---------------------	---------------

۳۴ فرض کرد که به فرض کرد به

16. 11. 1951 16. 11. 1951 4 201

جید فطرت والوں	جید شخص
----------------	---------

۱۲	سے دافع ہون	سے دافع ہو
----	-------------	------------

کے لئے کہ اس کا سہارا بنے۔

۲۰۰

• • •

۴۹۵ | ۱۳ | لودیت ل | لودیت ل

نقطہ بارخیزش کی کائناتی خدمت کو عند

$$275 \quad 9 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 13 \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 17 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 21 \quad 22 \quad 23 \quad 24 \quad 25 \quad 26 \quad 27 \quad 28 \quad 29 \quad 30 \quad 31 \quad 32 \quad 33 \quad 34 \quad 35 \quad 36 \quad 37 \quad 38 \quad 39 \quad 40 \quad 41 \quad 42 \quad 43 \quad 44 \quad 45 \quad 46 \quad 47 \quad 48 \quad 49 \quad 50 \quad 51 \quad 52 \quad 53 \quad 54 \quad 55 \quad 56 \quad 57 \quad 58 \quad 59 \quad 60 \quad 61 \quad 62 \quad 63 \quad 64 \quad 65 \quad 66 \quad 67 \quad 68 \quad 69 \quad 70 \quad 71 \quad 72 \quad 73 \quad 74 \quad 75 \quad 76 \quad 77 \quad 78 \quad 79 \quad 80 \quad 81 \quad 82 \quad 83 \quad 84 \quad 85 \quad 86 \quad 87 \quad 88 \quad 89 \quad 90 \quad 91 \quad 92 \quad 93 \quad 94 \quad 95 \quad 96 \quad 97 \quad 98 \quad 99 \quad 100$$

صفحہ (۲۷۶) کا شکل میں بجائی و کی و کہو

نقطہ پ	۹	۲۷۶
نقطہ س کی یہ سر	۱۱	"
دریافت نہیں ہو سکتی ہی مثال	۵	۲۷۹
بند سے باجبرسی بھی کچھ استخا	=	=
ان اوتار کی خط منحنی کی	۷	=
خط منحنی کی طرف محور کی سر	۸	=
جو کنکریہ	۱۰	=
(ن + ۲) (ن + ۱)	۹	۲۸۰
بہت طویل ہو گا	۴	۲۸۱
اورف = سن لا لا	۱۶	=
کروڑ لاء	۱	۲۸۲
بعض شرائط	۳	=
دو سے زیادہ	۴	=
دور ہو سکتی ہیں ایسی	۱۶	"

لاگر یا لڈز	لاگر یا لڈز	۲۸۳	۱
لوکھان مرتبہ کا ہوتا ہی	لوکھان مرتبہ کا ہوتا ہی	۶	۶
صفحہ (۲۸۶) کی شکل میں لکھو یا لے آ کی	صفحہ (۲۸۶) کی شکل میں لکھو یا لے آ کی		
صفحہ (۲۹۱) کی شکل میں بیضوی سے دائیں طرف ایک حرف ق کا کھد دو مگر یہ نقطہ خط	صفحہ (۲۹۱) کی شکل میں بیضوی سے دائیں طرف ایک حرف ق کا کھد دو مگر یہ نقطہ خط		
ولا پر نو اور خارج بیضوی سے	ولا پر نو اور خارج بیضوی سے		
ط لا + ط = ۲ ص ۲	ط لا + ط = ۲ ص ۲	۲۹۷	۱۵
بیسے دور کرنی	بیسے دور کرنی	۳۰۰	۱۰
اگر ضرورت پڑی اور ضرب کرد	اگر ضرورت پڑی اور ضرب کرد	۳۰۲	۱۱
یا ط اور ن ق	یا ط اور ن ق	۳۰۶	۱۲
اور = ط لا	اور = ط لا	۳۱۲	۱۰
جو کہ نقطہ شروع سے	جو کہ نقطہ شروع سے	۳۱۴	۱۳
ب ق	ب ق	۳۱۴	۱۱
تو خط ب ق	تو خط ب ق	۳۱۴	۱۲
صفحہ (۳۱۷) کی شکل (۲) میں لکھو یا لے آ کے آ اور بجای آ کے آ اور جس کا کہ نقطہ نظر	صفحہ (۳۱۷) کی شکل (۲) میں لکھو یا لے آ کے آ اور بجای آ کے آ اور جس کا کہ نقطہ نظر		
وق قطع کرتا ہی افرونی دایرہ کو اس جگہ حرف ز کا درج کرنا چاہئے۔	وق قطع کرتا ہی افرونی دایرہ کو اس جگہ حرف ز کا درج کرنا چاہئے۔		
دکور بر نو	دکور بر نو	۳۱۹	۲
ہر ایک نقطہ دکر	ہر ایک نقطہ دکر	۳۱۹	۱۳
دکر = ط لا	دکر = ط لا	۳۱۹	۱۵
اور ز او یہ د ب ق	اور ز او یہ د ب ق	۳۱۹	۱۰
صفحہ (۳۲۱) کی شکل میں لکھو حرف ق اور جس جگہ پر جہان نقطہ ار خط کھینچا	صفحہ (۳۲۱) کی شکل میں لکھو حرف ق اور جس جگہ پر جہان نقطہ ار خط کھینچا		
مرکز سے قطع کرنا ہی افرونی کو	مرکز سے قطع کرنا ہی افرونی کو		
تیسرے ربع دایرہ میں	چوتھے ربع دایرہ میں	۳۲۱	۱۲
سطح ق ق ب	سطح ق ق ب	۳۲۵	۱۷
خط ق ب سے	خط ق ب سے	۳۲۷	۱۶
لکھو صفحہ (۳۲۸) کی شکل میں حرف ق اور جس جگہ پر جہان نقطہ ار خط کھینچا	لکھو صفحہ (۳۲۸) کی شکل میں حرف ق اور جس جگہ پر جہان نقطہ ار خط کھینچا		

صفحہ (۳۳۹) کی شکل میں درج کردہ حرف ت اور س عام پرچان خطوط میں اور ق نقطہ

بین خط آء پر			
۳۴۲	۱۵	- (لا، لا۲) +	- (لا، لا۲)
۳۴۳	۱۴	اور ن آ	اور ح آ
۳۴۵	۲۴	خط آول سے یعنی ط = کو کہ	خط آولا سے یعنی د = کو کہ
۴	۵	دوسرے کو کہ = - دوسرے اور	دوسرے کو کہ = - دوسرے اور
۴	۹	مساوات مستقیم سے	مساوات خط مستقیم سے
۴	۱۸	سطح لا۲	سطح لا۲
۳۴۶	۲	سطح لا۲ پر	سطح لا۲ پر
۳۵۶	۱۸	اپنی مطلب فرض کے جادوین	اپنی مطلب کے فرض کے جادوین
۳۵۸	۱۲	فرض کرو کہ نقطہ سطح کا	فرض کرو کہ لفظ سطح کا
۳۵۹	۲	= حجم ک ع	= ۵ جس ک ع
۴	۴	+ ۵ جس ک د	+ ۵ جس ک د
۴	۶	اور چونکہ کہ کو ب	اور چونکہ کہ کو ب
۴	۱۵	+ $\frac{ع}{۵}$ حص ۱ =	+ $\frac{ع}{۵}$ حص ۱ =
۳۶۰	۶	... + حجم ک . لا۲ = ف	... + ع حجم ک . لا۲ = ف
۳۶۱	۶	- (لا، لا۱) +	- (لا، لا۱)
۳۶۲	۱۵	متوازی منطبق ہون	متوازی یا منطبق ہون
۳۶۴	۵	- (د - ط)	- (د - د)
۴	۶	دص - دص	دص - دص
۳۶۶	۱۵	خط میں سے	خط میں ہے
۴	۱۶	لون خطوط کا ہی	لون خطوط کی ہر
۳۶۷	۱	+ ع	+ ع
۳۶۸	۱	بنانا ہی	بنانا ہی کہتے ہی
۴	۳	کہ محور دن کی	کہ جو محور دن کی

۱۰-۱۱	۱۰-۱۱	۱۰-۱۱	۱۰-۱۱
۱۴-۱۵	۱۴-۱۵	۱۴-۱۵	۱۴-۱۵
۱۶-۱۷	۱۶-۱۷	۱۶-۱۷	۱۶-۱۷
۱۸-۱۹	۱۸-۱۹	۱۸-۱۹	۱۸-۱۹
۲۰-۲۱	۲۰-۲۱	۲۰-۲۱	۲۰-۲۱
۲۲-۲۳	۲۲-۲۳	۲۲-۲۳	۲۲-۲۳
۲۴-۲۵	۲۴-۲۵	۲۴-۲۵	۲۴-۲۵
۲۶-۲۷	۲۶-۲۷	۲۶-۲۷	۲۶-۲۷
۲۸-۲۹	۲۸-۲۹	۲۸-۲۹	۲۸-۲۹
۳۰-۳۱	۳۰-۳۱	۳۰-۳۱	۳۰-۳۱
۳۲-۳۳	۳۲-۳۳	۳۲-۳۳	۳۲-۳۳
۳۴-۳۵	۳۴-۳۵	۳۴-۳۵	۳۴-۳۵
۳۶-۳۷	۳۶-۳۷	۳۶-۳۷	۳۶-۳۷
۳۸-۳۹	۳۸-۳۹	۳۸-۳۹	۳۸-۳۹
۴۰-۴۱	۴۰-۴۱	۴۰-۴۱	۴۰-۴۱
۴۲-۴۳	۴۲-۴۳	۴۲-۴۳	۴۲-۴۳
۴۴-۴۵	۴۴-۴۵	۴۴-۴۵	۴۴-۴۵
۴۶-۴۷	۴۶-۴۷	۴۶-۴۷	۴۶-۴۷
۴۸-۴۹	۴۸-۴۹	۴۸-۴۹	۴۸-۴۹
۵۰-۵۱	۵۰-۵۱	۵۰-۵۱	۵۰-۵۱
۵۲-۵۳	۵۲-۵۳	۵۲-۵۳	۵۲-۵۳
۵۴-۵۵	۵۴-۵۵	۵۴-۵۵	۵۴-۵۵
۵۶-۵۷	۵۶-۵۷	۵۶-۵۷	۵۶-۵۷
۵۸-۵۹	۵۸-۵۹	۵۸-۵۹	۵۸-۵۹
۶۰-۶۱	۶۰-۶۱	۶۰-۶۱	۶۰-۶۱
۶۲-۶۳	۶۲-۶۳	۶۲-۶۳	۶۲-۶۳
۶۴-۶۵	۶۴-۶۵	۶۴-۶۵	۶۴-۶۵
۶۶-۶۷	۶۶-۶۷	۶۶-۶۷	۶۶-۶۷
۶۸-۶۹	۶۸-۶۹	۶۸-۶۹	۶۸-۶۹
۷۰-۷۱	۷۰-۷۱	۷۰-۷۱	۷۰-۷۱
۷۲-۷۳	۷۲-۷۳	۷۲-۷۳	۷۲-۷۳
۷۴-۷۵	۷۴-۷۵	۷۴-۷۵	۷۴-۷۵
۷۶-۷۷	۷۶-۷۷	۷۶-۷۷	۷۶-۷۷
۷۸-۷۹	۷۸-۷۹	۷۸-۷۹	۷۸-۷۹
۸۰-۸۱	۸۰-۸۱	۸۰-۸۱	۸۰-۸۱
۸۲-۸۳	۸۲-۸۳	۸۲-۸۳	۸۲-۸۳
۸۴-۸۵	۸۴-۸۵	۸۴-۸۵	۸۴-۸۵
۸۶-۸۷	۸۶-۸۷	۸۶-۸۷	۸۶-۸۷
۸۸-۸۹	۸۸-۸۹	۸۸-۸۹	۸۸-۸۹
۹۰-۹۱	۹۰-۹۱	۹۰-۹۱	۹۰-۹۱
۹۲-۹۳	۹۲-۹۳	۹۲-۹۳	۹۲-۹۳
۹۴-۹۵	۹۴-۹۵	۹۴-۹۵	۹۴-۹۵
۹۶-۹۷	۹۶-۹۷	۹۶-۹۷	۹۶-۹۷
۹۸-۹۹	۹۸-۹۹	۹۸-۹۹	۹۸-۹۹
۱۰۰-۱۰۱	۱۰۰-۱۰۱	۱۰۰-۱۰۱	۱۰۰-۱۰۱

